

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES  
Departamento de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

## **Uma breve análise do movimento Browniano**

Vitória -ES, Brasil  
12 de Dezembro de 2014



Universidade Federal do Espírito Santo – UFES  
Departamento de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

## **Uma breve análise do movimento Browniano**

Oscar Mario Londoño Duque

Orientador: Fábio Júlio da Silva Valentim

Vitória -ES, Brasil  
12 de Dezembro de 2014

---

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Uma breve análise do movimento Browniano/ Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática. – Vitória -ES, Brasil, 12 de Dezembro de 2014-

Orientador: Fábio Júlio da Silva Valentim

Dissertação(Mestrado) – Oscar Mario Londoño Duque, 12 de Dezembro de 2014.

1. Noções básicas de teoria da probabilidade. 2. Movimento browniano: Definição e propriedades de suas trajetórias. 3. Movimento Browniano e alguns processos relacionados I. Fábio Júlio da Silva Valentim. II. Universidade Federal do Espírito Santo. III. Departamento de Matemática. IV. Uma breve análise do movimento Browniano

CDU 02:141:005.7

---

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço á minha família (Mãe, Pai) Não só por motivar meus estudos, sim por tudo minha vida. Dedico a vocês esta conquista.

Agradeço a meus colegas do mestrado, Silvano, Vitor, Nadia e Solon pela amizade e vontade também a meus professores do PPGMAT-UFES por sua paciência e disposição para ensinar, especialmente, meu orientador o professor Fábio Júlio da Silva Valentim, a secretaria do PPGMAT-UFES, Jussára. Agradeço CAPES pelo apoio financeiro.

*Enquanto Deus está nos céus, todo na terra vai ficar bem*



# Resumo

Este texto tem como objetivo principal estudar de forma introdutória o movimento browniano. Pretendemos apresentar algumas propriedades de suas trajetórias, em particular, abordando questões de continuidade, diferenciabilidade e recorrência. Ademais, identificaremos o movimento browniano como exemplo de diferentes classes de processos estocásticos, por exemplo, como um processo de Markov, gaussiano, martingal e de Lévy. Finalizamos com construção de alguns processos a partir do movimento browniano

**Palavras-chaves:** Movimento Browniano. Processos Estocásticos. Processo Gaussiano. Martingal. Processo de Markov. Processo de Levy.





# Abstract

This text has as main objective to study an introductory way Brownian motion. We intend to present some properties of their trajectories, in particular, addressing questions of continuity, differentiability and recurrence. Furthermore, Brownian motion identified as an example of different classes of stochastic processes, for example, as a Markov process, Gaussian, Lévy and martingale. Finalized with construction of some processes from Brownian motion.

**Key-words:** Brownian movement. Stochastic Processes. Gaussian process. Martingale. Markov process. Levy process.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Movimento Browniano usual em 3D . . . . .	14
Figura 2 – Relação entre os tipos de convergência . . . . .	39
Figura 3 – Movimento browniano planar para 100 passos . . . . .	51
Figura 4 – Movimento browniano $B_t$ em $[0, 1]$ . . . . .	52
Figura 5 – Primeira iteração $X_t^{(0)}$ . . . . .	56
Figura 6 – Segunda iteração $X_t^{(1)}$ . . . . .	57
Figura 7 – Terceira iteração $X^{(2)}(t)$ . . . . .	58
Figura 8 – Passeio Aleatório discreto com 10 passos, simétrico +1-1 e probabilidade $\frac{1}{2}$ . . . . .	62
Figura 9 – Malha de decisão com probabilidade p e q . . . . .	62
Figura 10 – Trajetória discreta simples e simétrica com 40 passos . . . . .	63
Figura 11 – Trajetória discreta não simples e não simétrica com 40 passos . . . . .	63
Figura 12 – Passeio aleatório discreto simples e simétrico com 100 passos . . . . .	64
Figura 13 – Três passeios aleatórios discretos com 10 passos, e com passeio médio . . . . .	64
Figura 14 – Três passeios aleatórios discretos com 100 passos, e com passeio médio . . . . .	66
Figura 15 – Passeio aleatório discreto com 1000 passos . . . . .	67
Figura 16 – Passeios aleatórios não simples e não simétrica com 15 passos . . . . .	68
Figura 17 – interpolação linear de passeios aleatórios não simples e não simétrica com 1000 passos . . . . .	68
Figura 18 – Movimento browniano, com $t \in [0, 10]$ com uma partição de 1000 . . . . .	75
Figura 19 – Movimento browniano, com $t \in [0, 1]$ com uma partição de 1000 . . . . .	75
Figura 20 – Movimento browniano $B_t$ e $tB_{\frac{1}{t}}$ com 100 passos, com $t \in [0, 1]$ . . . . .	76
Figura 21 – Movimento browniano $B_t$ e $-B_t$ com 300 passos, com $t \in [0, 1]$ . . . . .	77
Figura 22 – Movimento browniano $B_t$ e $B_{t+t_0} - B_{t_0}$ com 300 passos, com $t \in [0, 1]$ e $t_0 = 0.2$ . . . . .	78
Figura 23 – Martingal $e^{uB_t - \frac{tu^2}{2}}$ com $t \in [0, 1]$ $u = .001$ e 500 passos . . . . .	114
Figura 24 – Movimento browniano com ponte para $T = 1$ com 500 passos . . . . .	124
Figura 25 – Movimento browniano com Drift para $t \in [0, 100]$ , $\mu = 0.1$ e $\sigma = 0.1$ com 200000 passos . . . . .	126
Figura 26 – Movimento browniano geométrico para $t \in [0, 1]$ , $\mu = 0.2$ e $\sigma = 1$ com 1000 passos . . . . .	130
Figura 27 – <b>Processo Ornstein-Uhlenbeck</b> para $t \in [0, 1]$ , $\beta = 2$ , $\sigma = 0.01$ e $v = 0.2$ com 300 passos . . . . .	134

Figura 28 – Movimento browniano fracionário para 1000 passos com $H=0.1$ e $H=0.4$ e $t \in [0, 1]$ . . . . .	136
Figura 29 – Movimento browniano fracionário para 1000 passos com $H=0.5$ , $H=0.7$ e $H=0.8$ e $t \in [0, 1]$ . . . . .	136

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Noções básicas de teoria da probabilidade</b>	<b>15</b>
2.1	Conceitos básicos de probabilidade	15
2.2	Independência	25
2.3	Esperança	26
2.3.1	Propriedades da esperança	26
2.4	Variância	28
2.4.1	Propriedades da variância	28
2.5	Convergência de variáveis aleatórias	29
2.5.1	Lema de Borel-Cantelli	29
2.5.2	Tipos de Convergência	33
2.5.3	Relação entre os tipos de convergência	34
2.5.4	Função característica e função geradora de momentos	39
2.6	Leis dos Grandes Números e Teorema Central do Limite	45
<b>3</b>	<b>Movimento browniano: Definição e propriedades de suas trajetórias</b>	<b>49</b>
3.1	Processos estocásticos	49
3.2	Movimento browniano	50
3.2.1	Existência Movimento browniano (MB)	54
3.2.2	Passeios aleatórios	61
3.2.3	Movimento browniano é um processo gaussiano	68
3.3	Propriedades das trajetórias do Movimento Browniano	73
<b>4</b>	<b>Movimento Browniano e alguns processos relacionados</b>	<b>105</b>
4.1	Movimento browniano é um processo de Markov	105
4.1.1	Transcendência e recorrência do movimento browniano	109
4.2	Movimento browniano é uma martingal	113
4.3	Movimento browniano é um processo de Lévy	115
4.4	Processos construídos a partir do movimento browniano	120
4.4.1	Movimento browniano com ponte	120
4.4.2	Movimento browniano com Drift	123
4.4.3	Movimento browniano geométrico	126
4.4.4	Processo Ornstein-Uhlenbeck	130
4.4.5	Movimento browniano fracionário	134

5 Conclusões . . . . . 137

Referências . . . . . 139

# 1 Introdução

Esta dissertação tem como objetivo principal estudar de forma introdutória o movimento browniano. Pretendemos apresentar algumas propriedades de suas trajetórias, em particular, abordando questões de continuidade, diferenciabilidade e recorrência. Ademais, identificaremos o movimento browniano como exemplo de diferentes classes de processos estocásticos, por exemplo como um processo de Markov, gaussiano, martingal e de Lévy.

A importância de estudar o movimento browniano radica em sua natureza "universal" dentro dos processos estocásticos que parece ser "tudo". De fato, como veremos adiante, o movimento browniano além de se identificar com as classes de processos citados no primeiro parágrafo, é utilizado na construção e representação de muitos outros. Isto reflete na utilização do movimento em diversas áreas, com por exemplo, em Física, Economia, Finanças, Matemática, Química e Biologia. Ademais, as trajetórias do movimento browniano possui uma relevante quantidade de propriedades interessantes que por se o tornam um objeto matemático interessante.

O texto tem a seguinte organização:

1. O segundo capítulo é uma breve introdução as noções básicas de probabilidade. Em particular, abordaremos os conceitos de espaço de probabilidade, independência, esperança, variância, algumas noções de convergência, funções características. Finalizamos este capítulo com o enunciado da lei dos grandes números e o Teorema central do limite. A referência principal utilizada neste capítulo foi o livro ([JAMES, 2004](#)), onde podem ser encontradas as demonstrações omitidas neste capítulo.
2. No terceiro capítulo, nós definimos, provamos a existência do movimento Browniano e sua identificação como um processo gaussiano, e investigamos algumas propriedades de suas trajetórias. Destacamos as propriedades de não regularidade, não diferenciabilidade, auto similaridade, conjunto de zeros, invariância por escala, variação não limitada, *Hölder* continuidade dentre outros. As referências principais são os livros ([ATHREYA; LAHIRI, 2006](#)), ([KARATZAS; SHREVE, 1991](#)) e ([LAWLER, 2006](#)).
3. Finalmente, o último capítulo é dedicado a identificar o movimento browniano como processo de Markov, martingal e processo de Lévy. Veremos a relação entre o movimento browniano e a equação do calor e como consequência, deduziremos as propriedades de recorrência e transcendência do movimento browniano. Demonstraremos que todo processo de Lévy contínuo é o movimento browniano com Drift. Finalizamos este capítulo com a construção de alguns processos a partir do movimento browniano. Mais especificamente, movimento browniano com ponte ou bridge, movi-

mento browniano com Drift, ou com tendência, ou aritmético, movimento browniano geométrico, Processo Ornstein - Uhlenbeck, movimento browniano fracionário. As principais referências são os livros (ETHIER; KURTZ, 1986), (TANKOV, 2003) e (KARATZAS; SHREVE, 1991).

Para concluir, observamos que a ênfase no estudo do movimento browniano foi o caso unidimensional. Além de tornar a exposição mais simples na notação, a maioria das propriedades e resultados no caso  $d$ -dimensional,  $d \geq 2$ , recai em essência ao caso unidimensional. de fato, um processo estocástico em  $\mathbb{R}^d$  é um movimento browniano se, e só se, cada uma de suas  $d$  componentes são movimentos brownianos unidimensionais, veja seção 3.2. Para o estudo das propriedades de recorrência do movimento browniano é necessário considerar o caso  $d$ -dimensional. As figuras apresentadas no texto são de autoria própria e refletem meu interesse em simulações computacional e programação. As quais foram feitas usando a seguinte função como ideia principal: Dado um  $T$  (tempo de simulação) e um  $N$  (numero de passos), temos

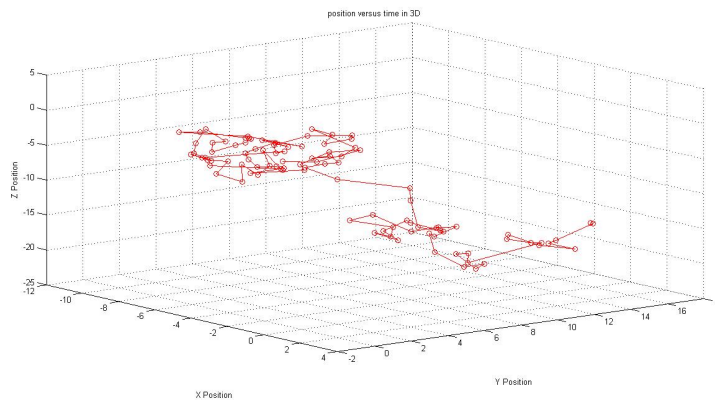


Figura 1 – Movimento Browniano usual em 3D

```
function [B]=MB(T,N)
randn('state',100) % vetor de numeros aleatorios normais
dt = T/N;
dB = sqrt(dt)*randn(1,N); %vetor de incrementos
B = cumsum(dB); % suma acumulativa
M=max(abs(B));plot([0:dt:T],[0,B],'b') % grafica W vs t
grid on xlabel('t','FontSize',16) ylabel('B(t)','FontSize',16)
title(['MB discreto no tempo de 0 até ' int2str(T) 'com' int2str(N) 'pasos'])
axis([0 T -M-0.5 M+0.5])
```



## 2 Noções básicas de teoria da probabilidade

A teoria de probabilidade consiste em usar a intuição para estudar os fenômenos cotidianos. Usando o princípio básico do ser humano que é a ideia de experimento. Podemos classificar os experimentos em aleatórios (casuais) e não aleatórios (determinísticos). Os experimentos determinísticos são totalmente caracterizados a priori, ou seja, são fenômenos em que o resultado é sabido antes mesmo em que ele ocorra e desta forma, nada temos a fazer. Os experimentos que iremos estudar são os aleatórios, dos quais não sabemos o resultado a priori, ou seja, são acontecimentos cujos resultados não podem ser previstos. A seguir tratamos os termos básicos associados a modelagem dos experimentos aleatórios.

Mais especificamente, neste capítulo temos vários objetivos, o primeiro é dar as noções básicas da teoria da probabilidade, que envolve as ideias de variável aleatória, probabilidade, independência, esperança, variância, covariância, convergência de v.a., a relação entre os tipos de convergência e também o conceito de função característica e finalmente a lei dos grandes números e o Teorema Central do Limite. Todo o primeiro capítulo foi feito seguindo o livro de (JAMES, 2004).

### 2.1 Conceitos básicos de probabilidade

Nesta seção vamos a introduzir a ideia de espaço de probabilidade e o conceito de função de probabilidade e suas propriedades, para depois dar uma ideia de variável aleatória, função de distribuição, função de densidade.

O primeiro elemento na modelagem de um experimento é o espaço amostral, que consiste no conjunto de todos os possíveis resultados do experimento. O espaço amostral geralmente é representado como o conjunto  $\Omega$ .

Por exemplo, se o experimento é lançar uma moeda e verificar se a face é cara ou coroa, o espaço amostral é o conjunto  $\Omega = \{cara, coroa\}$ . Para o lançamento de um dado de seis faces, o espaço amostral é  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Em estes exemplos, associamos os eventos a subconjuntos do espaço amostral. Portanto, do ponto de vista matemático, vamos definir eventos como subconjuntos do espaço amostral. O próprio espaço amostral é um evento, também conhecido como evento certo, enquanto que o evento incerto é denominado de evento vazio e denotado por  $\emptyset$ . De forma mais geral, temos a seguinte definição.

**Definição 2.1.1.** *Um **espaço de probabilidade** é uma terna  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  formada por:*

1. Um conjunto  $\Omega$  O qual chamaremos de espaço amostral.
2. Uma família  $\mathfrak{S}$ , de subconjuntos de  $\Omega$  que tem estrutura de  $\sigma$ -álgebra, ou seja:

- i)  $\emptyset \in \mathfrak{S}$
- ii) Se  $A \in \mathfrak{S}$ , o complemento de A, ou seja,  $A^c$  também pertence a  $\mathfrak{S}$
- iii)  $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{S}$  então  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{S}$ .

Os elementos de  $\mathfrak{S}$  serão chamados de eventos.

3. Uma aplicação  $\mathbb{P} : \mathfrak{S} \rightarrow [0, 1]$  que cumpre:
  - a)  $\mathbb{P}[A] \geq 0$
  - b)  $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$  e  $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
  - c) Para qualquer sequência de eventos mutuamente exclusivos  $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{S}$ , isto é, eventos para os quais  $A_i \cap A_j = \emptyset$  quando  $i \neq j$ , temos que

$$\mathbb{P} \left[ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i].$$

Quando aplicamos a função probabilidade,  $\mathbb{P}$ , podemos interpretar da forma,  $\mathbb{P}[A] =$  "a probabilidade do evento  $A$  ocorrer". Se  $\mathbb{P}[A] = 1$ , dizemos que o evento  $A$  ocorre com probabilidade um, ou quase certamente (q.c).

Nesta dissertação, a menos que seja explicitado, estamos considerando fixado um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ .

A seguir, apresentamos algumas propriedades elementares da função probabilidade que são obtidas diretamente se usamos o item 3a), 3b) e 3c). Algumas regras básicas para o cálculo de probabilidades:

- a) Se  $A^c$  for o evento complementar de  $A$ , então  $\mathbb{P}[A] = 1 - \mathbb{P}[A^c]$ .
- b) A probabilidade da união de dois eventos  $A$  e  $B$  é calculada como

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B].$$

- c) Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são três eventos quaisquer, então

$$\mathbb{P}[A \cup B \cup C] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[A \cap C] - \mathbb{P}[B \cap C] + \mathbb{P}[A \cap B \cap C].$$

- d) Se  $A \subset B$ , então  $\mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$ .
- e) Se  $A \subset B$  então  $\mathbb{P}[B - A] = \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A]$

f) Sejam  $A_1, A_2, \dots$  eventos aleatórios tais que  $A_n \downarrow \emptyset$ , ou seja,

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$$

e ainda o  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \emptyset$ , então  $P[A_n] \rightarrow 0$ .

g) Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  uma sequência de eventos aleatórios, então

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i].$$

h) (Continuidade da Probabilidade). Se  $A_n \uparrow A$ , então

$$\mathbb{P}[A_n] \uparrow \mathbb{P}[A].$$

Similarmente se  $A_n \downarrow A$  então

$$\mathbb{P}[A_n] \downarrow \mathbb{P}[A].$$

i)  $\mathbb{P}\left[\bigcap_{k=1}^n A_k\right] \geq 1 - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}[A_k^C].$

j)  $\mathbb{P}\left[\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right] \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_k^C].$

k) Se  $\mathbb{P}[A_n] = 0$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , então

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = 0.$$

l) Se  $\mathbb{P}[A_n] = 1$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , então

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right] = 1.$$

m) Se  $A_1, A_2, \dots$  e  $B_1, B_2, \dots$  são eventos aleatórios, tais que,

$$\mathbb{P}[A_n] \rightarrow 1 \quad e \quad \mathbb{P}[B_n] \rightarrow p$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , então  $\mathbb{P}[A_n \cap B_n] \rightarrow p$ .

A demonstração das propriedades podem ser obtida em [(JAMES, 2004) seção 1.1].

Outro conceito importante da teoria de probabilidade é o conceito de independência entre dois eventos. Na prática, dois eventos são independentes quando a ocorrência de um evento não influencia a ocorrência do outro evento. Do ponto de vista probabilístico temos a seguinte definição:

**Definição 2.1.2.** *Dois eventos  $A$  e  $B$  são ditos independentes se*

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B].$$

**Definição 2.1.3. (probabilidade condicional)** A probabilidade de ocorrer um evento  $A$  dado que ocorreu um evento  $B$  é dada por

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}.$$

Dessa relação sai a regra do produto que é dada no Teorema a seguir.

**Teorema 2.1.1.** Considere um conjunto finito  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de eventos tais que os eventos condicionais  $A_i|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{i-1}$  tenham probabilidades positivas. Então temos que

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^n A_i\right] = \mathbb{P}[A_1]\mathbb{P}[A_2|A_1]\mathbb{P}[A_3|A_1 \cap A_2] \dots \mathbb{P}\left[A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right].$$

*Demonstração.* Para demonstrar este Teorema escrevemos

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^n A_i\right] = \mathbb{P}[A_1] \frac{\mathbb{P}[A_1 \cap A_2]}{\mathbb{P}[A_1]} \frac{\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3]}{\mathbb{P}[A_1 \cap A_2]} \dots \frac{\mathbb{P}[\bigcap_{i=1}^n A_i]}{\mathbb{P}[\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i]},$$

e usando a definição de probabilidade condicional, podemos reescrever o lado direito da igualdade acima como

$$\mathbb{P}[A_1]\mathbb{P}[A_2|A_1]\mathbb{P}[A_3|A_1 \cap A_2] \dots \mathbb{P}\left[A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right].$$

□

Como caso particular temos que, dados dois eventos  $A$  e  $B$ , concluímos que a probabilidade de ocorrência simultânea dos eventos  $A$  e  $B$  é igual a probabilidade de ocorrência do evento  $A$  (ou  $B$ ) vezes a probabilidade de ocorrência do evento  $A$  (ou  $B$ ) dado que ocorreu o evento  $B$  (ou  $A$ ), ou seja,

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[A|B].$$

A seguir, apresentamos o Teorema da probabilidade total que é usado com frequência para calcular a probabilidade de vários eventos.

**Teorema 2.1.2. (Teorema da probabilidade total)** Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  eventos dois a dois disjuntos que formam uma partição do espaço amostral, isto é,

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$

e assuma que  $\mathbb{P}[A_i] > 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Então, para qualquer evento  $B$ , temos que

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A_1 \cap B] + \dots + \mathbb{P}[A_n \cap B] = \mathbb{P}[A_1]\mathbb{P}[B|A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_n]\mathbb{P}[B|A_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i]\mathbb{P}[B|A_i].$$

*Demonstração.* Para demonstrarmos esse Teorema basta observarmos que como a sequência  $A_1, A_2, \dots$  formam uma partição então para qualquer  $B \in \Omega$ , temos que  $B = \bigcup_i (A_i \cap B)$ . Como os  $A_i$  são disjuntos dois a dois temos que  $B \cap A_i$  também são disjuntos e pelo item 3 da definição (2.1.1) e pelo Teorema (2.1.1) temos que

$$\mathbb{P}[B] = \sum_i \mathbb{P}[A_i \cap B] = \sum_i \mathbb{P}[A_i]\mathbb{P}[B|A_i].$$

□

Como uma consequência destes prévios resultados, temos o conhecido

**Teorema 2.1.3. (Teorema de Bayes)** *Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  eventos que formam uma partição do espaço amostral, e assuma que  $\mathbb{P}[A_i] > 0$  para todo  $i$ . Então, para qualquer evento  $B$  tal que  $\mathbb{P}[B] > 0$ , temos que*

$$\mathbb{P}[A_i|B] = \frac{\mathbb{P}[A_i]\mathbb{P}[B|A_i]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}[A_i]\mathbb{P}[B|A_i]}{\mathbb{P}[A_1]\mathbb{P}[B|A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_n]\mathbb{P}[B|A_n]}.$$

*Demonstração.* Para verificar o Teorema de Bayes, basta notar que  $\mathbb{P}[A_i]\mathbb{P}[B|A_i] = \mathbb{P}[B]\mathbb{P}[A_i|B]$  já que ambos são iguais a  $\mathbb{P}[A \cap B]$ , o que garante a primeira igualdade. A segunda igualdade segue da aplicação do Teorema da Probabilidade Total, Teorema (2.1.2) para  $B$ . □

Dado um fenômeno aleatório qualquer, com um certo espaço amostral, desejamos estudar a estrutura probabilística de quantidades associadas a esse fenômeno. Por exemplo, ao descrever uma peça manufaturada podemos empregar duas classificações: "defeituosa" ou "não-defeituosa". Para facilitar a análise, vamos atribuir um número real a cada resultado do experimento. Assim podemos atribuir o valor 0 às peças não defeituosas e 1 às defeituosas. Nós podemos entender por variável aleatória uma função que associa a cada elemento do espaço amostral um número real. Mais formalmente, temos a definição:

**Definição 2.1.4. (Variável aleatória)** *Dado um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$  uma variável aleatória é uma função real  $X$*

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

satisfazendo para todo  $x \in \mathbb{R}$

$$[X < x] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \mathfrak{F} \quad (2.1)$$

Neste texto vamos utilizar a abreviação v.a. para variável aleatória.

Assim a definição nos diz que para uma v.a.  $X$ , cada um dos conjuntos  $[X < x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , pertence a  $\sigma$ -álgebra,  $\mathfrak{F}$  de  $\Omega$ .

De modo equivalente podemos definir v.a. em termos dos borelianos de  $\mathbb{R}$ . Denote por  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  a menor  $\sigma$ -álgebra gerada pelos intervalos limitados da reta, a chamamos de  $\sigma$ -álgebra de Borel em  $\mathbb{R}$ . Uma função  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma v.a. se, e só, se, para todo  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  temos  $X^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$ . Veja por exemplo, ((CHUNG, 2001)).

Assim podemos falar da probabilidade de uma v.a.  $X$  aceitar um valor menor do que  $x \in \mathbb{R}$ , ou seja, escrevemos  $\mathbb{P}[\omega \in \Omega : X(\omega) < x]$  (ou ainda  $\mathbb{P}[X < x]$ ). De modo geral temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X[A] &= \mathbb{P}[X \in A] \\ &= \mathbb{P}[\omega \in \Omega / X(\omega) \in A] \quad \forall A \in \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Dada uma v.a. podemos associar de modo único uma função real definida nos reais a qual chamaremos de função de distribuição. Informalmente, a função de distribuição nos dá uma maneira de descrever como as probabilidades são associadas aos valores ou aos intervalos de valores de uma v.a. Formalmente, temos a definição.

**Definição 2.1.5. (*Função de distribuição*)** Uma variável aleatória  $X$  em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  a função de distribuição,  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  de  $X$ , é dada por

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

O conhecimento da função de distribuição é suficiente para entendermos o comportamento de uma v.a. Mesmo que a variável assuma valores apenas num subconjunto dos reais, a função de distribuição é definida em toda a reta. Ela é chamada de função de distribuição ou função de distribuição acumulada, pois acumula as probabilidades dos valores inferiores ou iguais a  $x$ .

A função de distribuição de uma v.a.  $X$  têm três propriedades básicas:

1.  $0 \leq F(x) \leq 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
2.  $F$  é não decrescente.
3.  $F$  é uma função contínua à direita e tem limite à esquerda.

*Demonstração.* item 1. Se  $x \rightarrow -\infty$ , então  $[X \leq x] \downarrow \emptyset$  e assim  $F(x) = \mathbb{P}[X \leq x] \downarrow 0$ . Se  $x \rightarrow +\infty$ , então  $[X \leq x] \uparrow \Omega$  e assim  $F(x) = \mathbb{P}[X \leq x] \uparrow 1$ .

Demonstração item 2.  $F$  não decrescente é equivalente a

$$x \leq y \Rightarrow [X \leq x] \subset [X \leq y] \Rightarrow F(x) = \mathbb{P}[X \leq x] \leq \mathbb{P}[X \leq y] = F(y)$$

Demonstração item 3.  $F$  é contínua a direita é equivalente a se  $x_n \downarrow x$ , então  $[X \leq x_n]$  é um sequência decrescente de eventos aleatórios e  $\bigcap_{n \geq 1} [X \leq x_n] = [X \leq x]$ , pois  $X \leq x$  se, e somente se,  $X \leq x_n \quad \forall n$ . Assim, concluímos que

$$F(x_n) = \mathbb{P}[X \leq x_n] \downarrow \mathbb{P}[X \leq x] = F(x)$$

□

**Exemplo 2.1.1.** Para o lançamento de uma moeda, temos que  $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$  e que  $\mathbb{P}(\text{cara}) = \mathbb{P}(\text{coroa}) = \frac{1}{2}$ . Definimos uma v.a.  $X$ , isto é, uma função de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$  da seguinte forma:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega = \text{cara}; \\ 0, & \text{se } \omega = \text{coroa}. \end{cases}$$

Vamos encontrar a função de distribuição de  $X$ . Um simples cálculo mostra que a função de distribuição de  $X$  é:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ 1/2, & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ 1, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

**Definição 2.1.6. (Função de densidade)** Dizemos que  $X$  é uma v.a. absolutamente contínua se existe uma função  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  denominada função densidade de probabilidade, que satisfaz às seguintes propriedades:

1.  $f(x) \geq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}_x$  e  $f$  é mensurável.
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Além disso, definimos para qualquer  $c, d \in \mathbb{R}_x$ , com  $c < d$  que

$$\mathbb{P}[c < X < d] = \int_c^d f(x)dx.$$

Vale a pena notar que, da forma como a probabilidade foi definida, a probabilidade de um ponto isolado é sempre zero, ou seja,  $\mathbb{P}[X = c] = \int_c^c f(x)dx = 0$ . Desta forma, podemos concluir que, quando  $X$  é uma v.a. contínua, a probabilidade de ocorrer um

valor específico é zero.

Observação: Se  $X$  é uma v.a. absolutamente contínua, então (quase certamente)

$$\frac{\partial}{\partial x} F_X(x) = f_X(x)$$

Assim podemos ter uma relação entre a função de densidade  $f_X$  e a função de distribuição  $F_X$  dada por  $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$  quase certamente. Isto significa, neste caso, que  $F_X$  é contínua e derivável por partes ( $F_X$  é derivável em todo ponto exceto num número enumerável de pontos), ou seja, o conjunto dos pontos de descontinuidade da função de distribuição  $F_X$  é enumerável, veja por exemplo [((CHUNG, 2001)) Cap. 1. seção 1.1].

**Exemplo 2.1.2. (Normal)** *Seja  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma v.a. absolutamente contínua com função distribuição de probabilidade dada por*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

*Usaremos a notação  $X \sim \mathbf{N}(0, 1)$  e diremos que v.a.  $X$  possui distribuição normal "padrão".*

*Para que  $f_X$  seja uma função de densidade, basta mostrarmos que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) ds = 1.$$

*Então, tomamos*

$$\left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) ds \right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) ds \stackrel{\text{Teo Fubini}}{=} \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$$

*e, a partir da mudança de variáveis  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , temos que*

$$\left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) ds \right]^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r d\theta dr = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ e^{-\frac{r^2}{2}} r \theta \right]_0^{\pi} dr = \int_0^{\infty} e^{-u} du = 1.$$

O seguinte resultado a respeito de estimativa da v.a. *normal*, será usado repetidas vezes adiante no texto.

**Lema 2.1.1.** [(MÖRTERS; PERES, 2010) Lema 2.5] *Seja  $Z \sim \mathbf{N}(0, 1)$ . Então para todo  $x \geq 0$*

$$\frac{x}{x^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \mathbb{P}[Z > x] \leq \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (2.3)$$

*Demonstração.* Primeiro provemos a desigualdade da direita, sabemos que

$$\mathbb{P}[Z > x] = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Como

$$u \geq x \Rightarrow \frac{u}{x} \geq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{u}{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{u}{x} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$



Portanto,

$$\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \int_x^\infty \frac{u}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Assim temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z > x] &= \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \int_x^\infty \frac{u}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\infty^x e^{-\frac{u^2}{2}} (-u) du \\ &= \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{u^2}{2}} \right]_\infty^x = \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Isto justifica a parte direita da desigualdade (2.3). Para provar a desigualdade da esquerda, definamos a seguinte função

$$f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} - (x^2 + 1) \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad x \geq 0$$

e mostremos que  $f(x) \leq 0$  para todo  $x \geq 0$ . Note que:

(i)  $f(0) < 0$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

Além disso,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}} (-x) - 2x \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du - (x^2 + 1) (-e^{-\frac{x^2}{2}}) \\ &= (1 - x^2 + x^2 + 1) e^{-\frac{x^2}{2}} - 2x \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= 2e^{-\frac{x^2}{2}} - 2x \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= -2x \left( \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} \right). \end{aligned}$$

Pela desigualdade da direita, obtemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

O que nos dá que  $f'(x) \geq 0$ , para todo  $x \geq 0$ . Assim, pelos item (i) e (ii) temos que  $f(x) \leq 0$ , para todo  $x \geq 0$ . segue daí que

$$\begin{aligned} x e^{-\frac{x^2}{2}} &\leq (x^2 + 1) \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ \frac{x}{(x^2 + 1)} e^{-\frac{x^2}{2}} &\leq \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi} \mathbb{P}[Z > x] \\ \frac{x}{(x^2 + 1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} &\leq \mathbb{P}[Z > x]. \end{aligned}$$

Isto completa a prova da expressão (2.3). Assim temos que, uma v.a. *normal* cumpre que

$$\mathbb{P}[N > x] \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}.$$

□

Vamos introduzir o conceito de vetor aleatório e estudar suas principais características. Por facilidade de notação, vamos considerar apenas vetores bi-dimensionais. Assim, dizemos que o par ordenado  $(X, Y)$  é um vetor aleatório se seus componentes  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias. Definimos para duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ . Um vetor  $Z = (X, Y)$  cujos componentes  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias é denominado vetor aleatório.

**Definição 2.1.7. (função de distribuição conjunta)** A função de distribuição de  $Z$  é definida como sendo uma função  $F_Z = F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}[\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}] = \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y] \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$

As propriedades da função de distribuição

1. A função de distribuição  $F_Z$  é não decrescente em cada variável, isto é, se  $x_1 \leq x_2$ , então

$$F_Z(x_1, y) \leq F_Z(x_2, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

2.  $F_Z$  é contínua à direita e tem limite à esquerda em cada variável, isto é, se  $x_n \downarrow x$  então

$$F_Z(x_n, y) \downarrow F_Z(x, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

3. Temos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_Z(x, y) = 0.$$

Esta propriedade vale para cada componente do vetor.

**Definição 2.1.8.** Dizemos que  $X$  e  $Y$  são conjuntamente contínuas se existe uma função  $f(x, y)$  definida para todos reais  $x$  e  $y$ , tal que

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)] = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx dy.$$

Para todo  $-\infty < a_i < b_i < \infty$  com  $i = 1, 2$ . A função  $f(x, y)$  é denominada função densidade de probabilidade conjunta de  $X$  e  $Y$ .

Se  $X$  e  $Y$  são conjuntamente absolutamente contínuas, então elas são individualmente absolutamente contínuas e suas funções densidades de probabilidade podem ser obtidas da seguinte forma

$$\mathbb{P}[X \in A] = \mathbb{P}[X \in A, Y \in (-\infty, \infty)] = \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = \int_A f_X(x) dx.$$

Onde  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$  é a função densidade de probabilidade de  $X$ . Similarmente, a função densidade de probabilidade de  $Y$  é dada por

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

## 2.2 Independência

Vamos estender a noção de independência para v.a.

**Definição 2.2.1.** Dizemos que as variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , definidas em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ , são coletivamente independentes, ou simplesmente independentes, se

$$\mathbb{P}[X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n] = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}[X_i \in B_i]$$

Para todo  $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Se as v.a.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são independentes, então funções de famílias disjuntas das variáveis são também independentes. Por exemplo:

- a)  $X_1 + X_2 + X_3$  e  $e^{X_4}$  são independentes.
- b)  $\min(X_1, X_2)$  e  $\max(X_3, X_4)$  são independentes.
- c)  $X_1 \cdot X_2$  e  $X_2 + X_3$  não são necessariamente independentes.

Um resultado de demonstração e que nos será útil é

**Proposição 2.2.1.** Sejam  $X, Y$  v.a. e sejam  $F_X$  e  $F_Y$  as funções de distribuição respectivas e  $F$  a função de distribuição conjunta das v.a  $X, Y$ . Então  $X, Y$  são independentes se, e somente se,  $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

A demonstração pode ser consultada em ((JAMES, 2004) Cap 2 seção 2.5)

**Proposição 2.2.2.** Sejam  $X, Y$  v.a. e sejam  $f_X$  e  $f_Y$  as funções de densidade respectivas e  $f$  a função de densidade conjunta das v.a  $X, Y$ . Então  $X, Y$  são independentes se, e somente se,  $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

A demonstração pode ser consultada em ((JAMES, 2004))

**Teorema 2.2.1.** Sejam  $X$  e  $Y$  duas v.a. independentes. Então,

$$U = g(X) \quad \text{e} \quad V = h(Y).$$

Também são independentes para quaisquer funções contínuas.  $g$  e  $h$ .

Podemos ver a demonstração em ((CHUNG, 2001)) Cap. 3 seção 3.3).

## 2.3 Esperança

Fazendo uma tentativa de resumir o comportamento de uma v.a. vamos estudar uma medida que estuda a tendência central da v.a., chamada de esperança ou valor esperado de uma v.a.

**Definição 2.3.1.** *Seja  $X$  uma v.a. em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ . Seja  $X$  uma v.a. e  $F$  sua função de distribuição. A esperança matemática da v.a.  $X$ , ou simplesmente esperança de  $X$ , denotada por  $\mathbb{E}[X]$  é definida por:*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) dx = \int X d\mathbb{P},$$

desde que a integral esteja bem definida.

Note que no caso em que a v.a.  $X$  tem função de densidade  $f(x)$  temos,

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

e se a v.a. é discreta, temos:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x \mathbb{P}[X = x] = \sum_x x p(x) = \sum_i x_i p(x_i).$$

### 2.3.1 Propriedades da esperança

1. Se  $X = c$ , isto é  $X(\omega) = c$  para todo  $\omega \in \Omega$ , então  $\mathbb{E}[X] = c$
2. Se  $X \leq Y$  então  $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$  Se as esperanças estão bem definidas.

#### 3. (Linearidade)

Se  $\mathbb{E}[X]$  está bem definida, então  $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$  para todo  $a, b \in \mathbb{R}$

#### 4. (Desigualdade de Jensen)

Seja  $\varphi$  uma função convexa definida na reta. Se a variável aleatória (v.a.)  $X$  é integrável, então  $\mathbb{E}[\varphi(X)] \geq \varphi(\mathbb{E}[X])$

5. Se  $X$  é uma (v.a.), então

$$\mathbb{E}[X^k] = \int x^k dF_X(x) \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

6. Seja  $X$  é uma (v.a.) e  $\varphi(X)$  uma função real mensurável. Então

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \stackrel{\text{def}}{=} \int y dF_{\varphi(X)}(y) = \int \varphi(x) dF_X(x)$$

Se  $X$  tiver função de densidade  $f(x)$ , Então  $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int \varphi(x) f(x) dx$ .

A demonstração das propriedades pode ser obtida em [(JAMES, 2004) Cap 3 seção 3.3]

**Proposição 2.3.1.** *Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são v.a. independentes e integráveis, então  $X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$  é integrável e*

$$\mathbb{E}[X_1 X_2 \cdots X_n] = (\mathbb{E}[X_1])(\mathbb{E}[X_2]) \cdots (\mathbb{E}[X_n]).$$

A demonstração pode ser obtida em ((ATHREYA; LAHIRI, 2006) Cap. 7. seção 7.1). A recíproca da Proposição anterior não é sempre verdadeira, isto é,  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$  não implica  $X$  e  $Y$  independentes.

**Definição 2.3.2. (Covariância)** *A covariância entre duas v.a.  $X$  e  $Y$  é definida como*

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Duas v.a.  $X$  e  $Y$  são ditas não-correlacionadas se  $Cov(X, Y) = 0$ . Segue-se que v.a. independentes são não-correlacionadas, mas a recíproca não é necessariamente verdadeira. Tome as v.a.  $X$ , que tem distribuição uniforme,

$$X \sim U(-1, 1) \quad e \quad Y = X^2.$$

Assim temos que  $Cov[X, Y] = 0$  mas  $Y$  é dependente de  $X$ . Há certos casos em que não correlação implica em independência. O caso mais importante é o da Normal: Se  $X$  e  $Y$  possuem distribuição conjunta normal bivariada e são não-correlacionadas, então  $X$  e  $Y$  são independentes. Agora, definamos a esperança condicional que é um conceito fundamental, para poder definir, os conceitos de Martingal, processo de Markov, etc.

**Definição 2.3.3.** *A esperança condicional de uma v.a não negativa  $\xi$  com respeito a uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G}$  é denotada por  $E[\xi|\mathcal{G}]$ , tal que*

i)  $E[\xi|\mathcal{G}]$  é  $\mathcal{G}$ -mensurável

ii) Para todo  $A \in \mathcal{G}$

$$\int_A \xi d\mathbb{P} = \int_A E[\xi|\mathcal{G}] d\mathbb{P}$$

A esperança condicional de uma v.a qualquer  $\xi$  com respeito a uma  $\sigma$ -álgebra é dada por:

$$E[\xi|\mathcal{G}] = E[\xi^+|\mathcal{G}] - E[\xi^-|\mathcal{G}]$$

e está definida apenas se

$$\max\{E[\xi^+|\mathcal{G}], E[\xi^-|\mathcal{G}]\} < \infty$$

## 2.4 Variância

Vamos a introduzir o conceito variância, que pode ser compreendido como uma medida de dispersão que nos permitem reconhecer que tanto os dados estão dispersos ao redor do ponto central, da média.

**Definição 2.4.1. (Momentos)** *Seja  $X$  uma v.a. Defina-se o  $k$ -ésimo momento ordinário, ou centrado no zero, da v.a.  $X$ ,  $m_k$ , como*

$$m_k = \mathbb{E}[X^k] = \int_{\mathbb{R}} x^k dF_X(x).$$

Assim, para uma v.a. continua temos que

$$m_k = \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x) dx$$

Onde  $f_X(x)$  é função de densidade de  $X$

**Definição 2.4.2. (Momentos Centrado)** *Seja  $X$  uma v.a. Defina-se o  $k$ -ésimo momento central da v.a.  $X$ ,  $M_k$ , como  $M_k = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$  Assim, para uma v.a. continua temos que*

$$M_k = \int_{\mathbb{R}} [x - \mathbb{E}[X]]^k f_X(x) dx.$$

Onde  $f_X(x)$  é função de densidade de  $X$ .

**Definição 2.4.3. (Variância)** *Seja  $X$  uma v.a. Defina-se a variância da v.a.  $X$ , como o segundo momento central da v.a.  $X$ , e denotada por  $V[X] = \text{Var}[X] = \sigma_X^2$ , ou seja,  $V[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ , observe que  $V[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ .*

**Proposição 2.4.1.** *A variância da v.a.  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  é dada por*

$$V\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n V[X_i] + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

**Corolário 2.4.1.** *Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são v.a. não-correlacionadas, então*

$$V[Y] = V\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n V[X_i]$$

A variância tem importantes propriedades

### 2.4.1 Propriedades da variância

1. Se  $C$  é constante, então  $V[C] = 0$
2. Se  $a, b \in \mathbb{R}$ , então  $V[aX + b] = a^2 V[X]$

3. **(Desigualdade de Markov)** Seja  $X$  uma v.a. não-negativa e seja  $\lambda > 0$  uma constante. Então para todo  $t > 0$

$$\mathbb{P}[|X| \geq \lambda] \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^t]}{\lambda^t} \quad (2.4)$$

4. **(Desigualdade Clássica de Chebyshev)** Seja  $X$  uma variável aleatória integrável e seja  $\lambda > 0$  uma constante. Então

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda] \leq \frac{V[X]}{\lambda^2}$$

A demonstração das propriedades pode ser obtida [(JAMES, 2004) Cap 3 seção 3.5].

## 2.5 Convergência de variáveis aleatórias

Considere um experimento devidamente modelado por um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ . Neste espaço vamos considerar uma sequência de variáveis aleatórias  $X_1, X_2, X_3, \dots$ . Em inúmeras situações teóricas e práticas, uma pergunta natural é qual o comportamento de longo prazo da sequência  $(X_n)_n$ . Dito de outra forma: quais as propriedades estatísticas de  $X_N$ , sendo  $N$  suficientemente grande?

O nosso objetivo é discutir a convergência das variáveis  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  para uma variável  $X$  quando  $n$  é grande, isto é, em qual sentido, podemos substituir  $X_n$  por  $X$  ou tentar aproximar  $\mathbb{P}[X_n \leq a]$  por  $\mathbb{P}[X \leq a]$ , ou  $\mathbb{E}[X_n]$  por  $\mathbb{E}[X]$ .

Nesta seção vamos apresentar um Lema muito importante, o Lema de Borel-Cantelli, que será usado com frequência nos capítulos seguintes. Também vamos introduzir alguns noções de convergência para v.a. e as relações entre os diferentes tipos de convergência e finalmente apresentamos o conceito de função característica.

### 2.5.1 Lema de Borel-Cantelli

Suponha que cada cauda de um evento tem probabilidade zero ou um, o problema é decidir qual é qual. O Lema de Borel-Cantelli é um passo importante nessa direção. Aplica-se a uma classe de eventos que inclui muitos evento-cuada. Começamos definindo o  $\liminf$  e o  $\limsup$  de uma sequência de eventos.

**Definição 2.5.1. ( $\limsup$  e  $\liminf$  de eventos)** . Dada uma sequência de eventos aleatórios  $A_n$ , definimos o evento  $\limsup A_n$ , denotado por  $[A_n \text{ infinitas vezes}]$  ou  $[A_n \text{ i.v.}]$ , por

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Definimos o evento  $\liminf A_n$ , denotado por  $[A_n \text{ eventualmente}]$ , por

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Observe: as seguintes interpretações.  $\limsup A_n$  é o conjunto dos  $\omega$ 's tais que  $\omega$  pertence a infinitos  $A_n$ 's. O evento  $\limsup A_n$  significa “ $A_n$  acontece infinitas vezes”.  $\liminf A_n$  é o conjunto dos  $\omega$ 's tais que  $\omega$  pertence a todos os  $A_n$ 's exceto uma quantidade finita deles. O evento  $\liminf A_n$  significa “ $A_n$  acontece para todo  $n$  grande”. De fato,  $\limsup A_n \in \mathfrak{S}$  e  $\liminf A_n \in \mathfrak{S}$ . Vale também que

$$\limsup A_n \subseteq \liminf A_n \quad e \quad \liminf(A_n^c) = (\limsup A_n)^c$$

**Teorema 2.5.1. (Lema de Borel-Cantelli).** *Seja  $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade e  $(A_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de eventos aleatórios. Então:*

1. Se  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] < \infty$  então

$$\mathbb{P}[A_n(i.v)] = \mathbb{P}\left[\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right] = 0$$

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] = \infty$  e os eventos  $A_n$  são independentes, então

$$\mathbb{P}[A_n(i.v)] = \mathbb{P}\left[\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right] = 1$$

*Demonstração.* do item 1. Se  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] < \infty$ , então  $\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}[A_k] \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . E como

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

Então temos que:

$$\mathbb{P}[\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n] \leq \mathbb{P}\left[\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right] \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}[A_k] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Portanto como  $0 \leq \mathbb{P}[\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n] \leq 0$ , concluímos que  $\mathbb{P}[\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n] = 0$ . Isto conclui a prova do item 1.

Para demonstrarmos o item 2 basta observar que

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right] = 1 \quad \text{para qualquer } n,$$

pois interseção de eventos com probabilidade 1 também tem probabilidade 1 (ver propriedade k na seção (2.1), ou seja, se demonstrarmos que

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right] = 1 \quad \text{então} \quad \mathbb{P}[\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n] = 1$$



e o resultado será demonstrado. Assim, seja  $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ , note que  $B_n \supset \bigcup_{k=n}^{n+m} A_k$ , para qualquer  $m \in \mathbb{N}$ , e portanto  $B_n^c \subset \left( \bigcup_{k=n}^{n+m} A_k \right)^c = \bigcap_{k=n}^{n+m} A_k^c$  e essa igualdade é válida pois.

$$\left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \quad e \quad \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c.$$

que são as chamadas leis de De Morgan. Logo, para todo  $m$  temos

$$1 - \mathbb{P}[B_n] = \mathbb{P}[B_n^c] \leq \mathbb{P} \left[ \bigcap_{k=n}^{n+m} A_k^c \right].$$

Como cada  $A_i$  são independentes então obtemos que

$$\mathbb{P} \left[ \bigcap_{k=n}^{n+m} A_k^c \right] = \prod_{k=n}^{n+m} \mathbb{P}[A_k^c] = \prod_{k=n}^{n+m} (1 - \mathbb{P}[A_k]).$$

Notemos que  $1 - p \leq e^{-p}$  para  $0 \leq p \leq 1$ , então temos que:

$$1 - \mathbb{P}[B_n] \leq \prod_{k=n}^{n+m} e^{-\mathbb{P}[A_k]} = \exp \left\{ - \sum_{k=n}^{n+m} \mathbb{P}[A_k] \right\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

pois por hipótese temos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] = \infty$ . Portanto  $\mathbb{P}[B_n] = 1$ , para todo  $n \geq 1$ .

□

**Teorema 2.5.2. (Lema de Fatou).** Para qualquer sequência  $(A_n)_n$  de eventos vale

$$\mathbb{P}[\liminf_n A_n] \leq \liminf_n \mathbb{P}[A_n]$$

*Demonstração.* Para qualquer  $k \in \mathbb{N}$  e  $m \geq k$  temos  $\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \subseteq A_m$ . Logo

$$\mathbb{P} \left[ \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \right] \leq \mathbb{P}[A_m]$$

e portanto

$$\mathbb{P} \left[ \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \right] \leq \inf_{m \geq k} \mathbb{P}[A_m].$$

Como  $(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n)_k$  é uma sequência crescente de eventos, temos que

$$\mathbb{P}[\liminf_n A_n] = \mathbb{P} \left[ \bigcup_{k=0}^{\infty} \left( \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \right) \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \right] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_n]$$

O último termo é igual a  $\liminf_n \mathbb{P}[A_n]$  o que termina a prova.

□

**Corolário 2.5.1.** Se  $\mathbb{P}[A_n(i.v)] = 0$  então  $\mathbb{P}[A_n] \rightarrow 0$

*Demonstração.* Aplicando o Lema de fatou, Teorema (2.5.2), para a sequência  $(A_n^c)_n$  temos que

$$\limsup_n \mathbb{P}[A_n] = 1 - \liminf_n \mathbb{P}[A_n^c] = 1 - \mathbb{P}[\liminf_n A_n^c] = \mathbb{P}[\limsup_n A_n] = 0.$$

donde segue o resultado.  $\square$

**Definição 2.5.2. (evento simétrico)** Para um processo  $X_1, X_2, \dots$ ,  $A \in \mathfrak{S}(\mathbf{X})$  dizem que é um evento simétrico se para qualquer permutação finita de índices  $\{i_1, i_2, \dots\}$  de  $\{1, 2, \dots\}$  existe um conjunto  $B \in \mathcal{B}_\infty$  tal que:

$$A = \{(X_1, X_2, \dots) \in B\} = \{(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots) \in B\}$$

Sabemos que  $\Delta$  é a diferença simétrica entre dois eventos por

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

**Teorema 2.5.3. Hewitt – Savage 0 – 1** Sejam  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d, com  $B \in \mathfrak{B}$  e

$$A = \{\omega | (X_1, X_2, \dots) \in B\}$$

Um evento simétrico. Então

$$\mathbb{P}[A] = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}[A] = 1$$

*Demonstração.* Seja  $A = [X \in B]$  um evento simétrico. Seja  $B_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ , com  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  a  $\sigma$ -álgebra de Borel do  $\mathbb{R}^n$ , tal que

$$A_n = \{\omega | (X_1, X_2, \dots, X_n) \in B_n\}.$$

E sabemos que

$$\mathbb{P}[A \Delta A_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Então  $\mathbb{P}[A_n] \rightarrow \mathbb{P}[A]$  e como  $A$  é simétrico então

$$\mathbb{P}[A_n \cap A_n] = \mathbb{P}[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in B_n; (X_{n+1}, \dots, X_{2n}) \in B_n].$$

E pela independência dos  $X_i$  temos que

$$\mathbb{P}[(X_1, \dots, X_n) \in B_n; (X_{n+1}, \dots, X_{2n}) \in B_n] = \mathbb{P}[(X_1, \dots, X_n) \in B_n] \mathbb{P}[(X_{n+1}, \dots, X_{2n}) \in B_n]$$

Assim quando  $n \rightarrow \infty$  temos que

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}^2[A].$$

O que implica que

$$\mathbb{P}[A] = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}[A] = 1$$

$\square$

## 2.5.2 Tipos de Convergência

A fim de ampliar a noção de convergência de seqüências de números de seqüências de v.a., existem bastantes possibilidades. Nos tipos de convergências a seguir, é considerada a seqüência  $(X_n)_{n \geq 1} = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$  em que  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  e o eventual limite  $X$  da seqüência  $(X_n)_{n \geq 1}$  que são v.a. definidas num mesmo espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ .

**Definição 2.5.3. (Convergência em probabilidade).** *Sejam  $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$  e  $X$  v.a. definidas num mesmo espaço de probabilidades  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ . Dizemos que  $X_n$  converge em probabilidade para  $X$  denotado por  $X_n \xrightarrow{P} X$  Se para todo  $\varepsilon > 0$*

$$\mathbb{P}[|X_n - X| \geq \varepsilon] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \mathbb{P}[|X_n - X| < \varepsilon] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 1.$$

Convergência em probabilidade, significa que se  $n$  for suficientemente grande, então a probabilidade que  $X_n$  seja diferente de  $X$  por mais que  $\varepsilon$  é muito pequena.

A convergência em probabilidade não é uma convergência pontual. Apenas afirma que para valores grandes de  $n$  as v.a.  $X_n$  e  $X$  são aproximadamente iguais, com probabilidade bem alta.

**Definição 2.5.4. (Convergência em distribuição).** *Sejam  $X_1, X_2, \dots$  e  $X$  v.a. com funções de distribuição  $F_{X_1}, F_{X_2}, \dots$  e  $F_X$  respectivamente. Diz-se que a seqüência*

*$(X_n, n \geq 1) = (X_1, X_2, \dots)$  de v.a. converge em distribuição (ou em lei) para  $X$ , e denota-se por  $X_n \xrightarrow{D} X$ , se para todo ponto  $x$  em que  $F_X$  é contínua, tem-se:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

**Definição 2.5.5. (Convergência quase certa (q.c)).** *Ou convergência em quase toda parte (q.t.p). Diz-se que a seqüência de v.a.  $(X_n, n \geq 1) = (X_1, X_2, \dots)$  converge quase certamente para  $X$ , e denota-se por  $X_n \xrightarrow{q.c} X$  se*

$$\mathbb{P}[X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X] = 1 \quad \text{ou equivalente} \quad \mathbb{P}\left[\left(\omega \in \Omega / X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(\omega)\right)\right] = 1.$$

A convergência quase certa é uma convergência pontual, isto é, uma convergência ponto a ponto. No entanto, ela permite que alguns pontos  $\omega \in \Omega$  escapem do critério de convergência. Entretanto, o conjunto desses pontos precisa ser negligenciável em termos probabilísticos, isto é, sua probabilidade deve ser zero.

**Definição 2.5.6. (Convergência em  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ )** *Considere  $X$  uma v.a. com  $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$  e  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  seqüência de v.a. Dizemos que  $X_n$  converge em  $L^p$  para  $X$  se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

*Notação:  $X_n \xrightarrow{L^p} X$ . Observação: quando  $p = 2$ , dizemos que converge em média quadrática ou MC.*

### 2.5.3 Relação entre os tipos de convergência

O seguinte Lema fornece um critério de convergência quase certa.

**Lema 2.5.1.**  $X_n \xrightarrow{q.c.} X \Leftrightarrow \mathbb{P}[|X_n - X| \geq \varepsilon \text{ (i.v.)}] = 0, \forall \varepsilon > 0$ , Onde (i.v.) significa infinitas vezes.

Uma referência para a prova pode ser o livro do [(CHUNG, 2001)] Cap. 4. seção 4.1]. Uma consequência do Lema de Borel-Cantelli é o seguinte resultado:

**Teorema 2.5.4.** *Sejam  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de v.a. e  $X$  uma v.a. Se para todo  $\varepsilon > 0$  temos  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} < \infty$ , então  $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ .*

*Demonstração.* Como por hipótese  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} < \infty$ , então pelo Lema de Borel-Cantelli item 1, Teorema (2.5.1) segue que

$$\mathbb{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon; \text{ i.v.}\} = 0.$$

Portanto, pelo critério de convergência quase certa, Lema (2.5.1) temos que  $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ .  $\square$

A seguir apresentamos mais algumas relações entre os diferentes tipos de convergência

1. Convergência quase certa q.c implica convergência em probabilidade, ou seja, se  $X_n \xrightarrow{q.c.} X$  então  $X_n \xrightarrow{P} X$ .

De fato, como por hipótese  $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ , então pelo critério de convergência quase certa, Lema (2.5.1), temos que para todo  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon; \text{ i.v.}\} = 0.$$

Mas observe que

$$\{|X_n - X| \geq \varepsilon; \text{ i.v.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| \geq \varepsilon\}.$$

Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} [|X_k - X| \geq \varepsilon; \text{ i.v.}] \right\} = 0.$$

Logo,

$$0 \leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P} \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} [|X_k - X| \geq \varepsilon] \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X.$$

Isto conclui a justificativa desta propriedade.

2. Convergência em probabilidade não implica convergência quase certa q.c, ou seja,

$$X_n \xrightarrow{P} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{q.c.} X.$$

De fato basta consideramos o contra exemplo. Seja a sucessão  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de v.a independentes com:

$$\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n} \quad e \quad \mathbb{P}[X_n = 1] = \frac{1}{n}.$$

A ideia é provar que  $X_n \xrightarrow{P} 0$  mas  $X_n \not\xrightarrow{q.c.} 0$ . De fato, como  $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|X_n - 0| < \varepsilon] = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - \frac{1}{n}] = 1.$$

Logo resulta que  $X_n \xrightarrow{P} 0$ .

Calculemos a convergência quase certa q.c. Definamos  $\forall \varepsilon > 0$

$$(A_n^\varepsilon)^c = [|X_n - 0| \geq \varepsilon]$$

com  $\mathbb{P}[(A_n^\varepsilon)^c] = \frac{1}{n}$  como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[(A_n^\varepsilon)^c] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Logo isto implica que  $\mathbb{P}[(A_n^\varepsilon)^c] = 0 \neq 1$  portanto  $X_n \not\xrightarrow{q.c.} 0$ .

Mas podemos ter o seguinte:

3. Sejam  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de v.a. e  $X$  uma v.a. Se  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ , então existe uma subsequência de inteiros crescente  $(n_k)_{k \geq 1}$  tal que  $X_{n_k} \xrightarrow{q.c.} X$ .

Para justificar tal propriedade, primeiramente observamos que  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$  se, e somente se,  $X_n - X \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ . Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $X = 0$ . Então por hipótese para todo  $k > 0$ , temos que

$$\mathbb{P}\left\{|X_n| > \frac{1}{2^k}\right\} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, para cada  $k > 0$ , existe uma subsequência  $\{n_k\}_{k \geq 1}$  tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left\{|X_{n_k}| > \frac{1}{2^k}\right\} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

Escolhida a subsequência  $\{n_k\}$ , obtemos que  $\mathbb{P}\left\{|X_{n_k}| > \frac{1}{2^k}\right\}, i.v. = 0$ .

Portanto, pelo Teorema (2.5.4), temos que

$$X_{n_k} \xrightarrow{q.c.} 0.$$

Este resultado nos diz que convergência em probabilidade implica em convergência quase certa ao longo de uma subsequência.

1. Convergência em média quadrática, MC, implica convergência probabilidade, ou seja. Se  $X_n \xrightarrow{M.C} X$  então  $X_n \xrightarrow{P} X$ . De fato, note que

$$\frac{|X_n - X|^2}{\varepsilon^2} \geq I_{\{w: |X_n - X| \geq \varepsilon\}}.$$

Logo tem-se que

$$\mathbb{E} \left[ \frac{|X_n - X|^2}{\varepsilon^2} \right] \geq \mathbb{E} \left[ I_{\{w: |X_n - X| \geq \varepsilon\}} \right].$$

Ou seja

$$\mathbb{E} \left[ \frac{|X_n - X|^2}{\varepsilon^2} \right] \geq \mathbb{P} [w : |X_n - X| \geq \varepsilon].$$

Como por hipótese  $X_n \xrightarrow{M.C} X$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^2] = 0$ .

Portanto  $X_n \xrightarrow{P} X$ , outra forma de provar o resultado pode ser, aplicando a desigualdade de Markov (2.4) para  $t = 2$  e  $\lambda = \varepsilon$ , de fato,

$$\mathbb{P}[|X_n - X| > \varepsilon] = \mathbb{P}[|X_n - X|^2 > \varepsilon^2] \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - X|^2]}{\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

- 4) Convergência em probabilidade não implica convergência em média quadrática M.C, ou seja,

$$X_n \xrightarrow{P} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{M.C} X.$$

De fato, seja a equação  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de v.a independentes com

$$\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{n}.$$

Provemos que  $X_n \xrightarrow{P} 0$  mas, no entanto  $X_n \not\xrightarrow{M.C} 0$ . De fato, como  $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|X_n - 0| < \varepsilon] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Segue-se que  $X_n \xrightarrow{P} 0$ . Agora, para a convergência na média quadrática.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n - 0]^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[0^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + n^2 \frac{1}{n}\right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty. \end{aligned}$$

Assim, não existe convergência em média quadrática.

1. Convergência M.C não implica Convergência quase certamente q.c, ou seja,

$$X_n \xrightarrow{M.C} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{q.c} X$$

*Demonstração.* Seja  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de v.a. com Convergência em probabilidade,  $X_n \xrightarrow{P} X$ , e Convergência em média  $p$   $X_n \xrightarrow{L^p} X$  mas não temos Convergência quase certa,  $X_n \not\xrightarrow{q.c} X$ .

Definimos  $A_n = [0, 1/n]$  e seja  $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$  com  $P$  a medida de Lebesgue no  $[0, 1]$ . Então para  $0 < \varepsilon < 1$

$$\lim P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \lim P(|X_n| \geq \varepsilon) = \lim P(|X_n| = 1) = 1/n \rightarrow 0.$$

Logo converge em probabilidade para zero. Além disso,

$$\begin{aligned} \lim E[|X_n - 0|^p] &= \lim E[|X_n|^p] = \lim P[|X_n|^p = 1] = \lim P[X_n^p = 1] \\ &= \lim P[X_n = 1] = \lim 1/n = 0. \end{aligned}$$

Portanto converge em média p para X. Entretanto utilizando o Lema de Borel-Cantelli, Teorema (2.5.1) temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty.$$

O que implica que  $P(|X_n| \geq \varepsilon, i.v.) = 1$  o que implica que  $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ .  $\square$

6) Convergência q.c não implica Convergência em média quadrática M.C, ou seja,

$$X_n \xrightarrow{q.c.} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{M.C.} X$$

*Demonstração.* Seja  $U \sim U(0, 1)$  variável aleatória uniforme e definimos a sucessão de v.a  $X_n = n\mathbb{I}_{\{U < \frac{1}{n}\}}$ . Verificar se a sequência converge (q.c) para zero mas não em média quadrática (M.C).

Note-se que esta é uma sucessão de v.a. não independentes, uma vez que todos  $X_i$  dependem da mesma v.a.  $U$ . Para aplicar o Lema de Borel-Cantelli, Teorema (2.5.1) definamos:  $\forall \epsilon > 0$

$$(A_n^\epsilon)^c = \{|X_n - 0| > \epsilon\} = \{n\mathbb{I}_{\{U < \frac{1}{n}\}} \geq \epsilon\} = \{\mathbb{I}_{\{U < \frac{1}{n}\}} \geq \frac{\epsilon}{n}\}.$$

e sabemos que  $\frac{\epsilon}{n} > 0$

$$\mathbb{P}\left[\mathbb{I}_{\{U < \frac{1}{n}\}} \geq \frac{\epsilon}{n}\right] = \mathbb{P}\left[\mathbb{I}_{\{U < \frac{1}{n}\}} = 1\right] = \mathbb{P}\left[U < \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n}.$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n^{\epsilon c}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Como esta série não é convergente, não podemos concluir que  $\mathbb{P}[A_\infty^\epsilon] = 1$ , como queríamos. Mas também não podemos concluir que  $\mathbb{P}[A_\infty^\epsilon] = 0$  pois, o Lema de Borel-Cantelli segunda parte, Teorema (2.5.1) exige que os  $A_n^\epsilon$  sejam independentes

e aqui isso não é verdade. No entanto, note que  $\forall u > 0$  todas as  $X_n = 0$  a partir de  $n > \frac{1}{u}$ . Logo  $X_n \xrightarrow{q.c} 0$ . Consideremos a convergência em média quadrática.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n - 0]^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[n \mathbf{I}_{\{U < \frac{1}{n}\}}]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \mathbb{E}[\mathbf{I}_{\{U < \frac{1}{n}\}}^2] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \mathbb{P}[U < \frac{1}{n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty. \end{aligned}$$

Em seguida, não existe convergência em média quadrática. □

7)  $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$  se, e somente se,  $X_n \xrightarrow{P} c$  Primeiramente suponhamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < c \\ 1, & \text{se } x \geq c \end{cases}$$

Dado  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{P}\{|X_n - c| \geq \varepsilon\} = \mathbb{P}\{X_n \geq c + \varepsilon\} + \mathbb{P}\{X_n \leq c - \varepsilon\} = \\ &= 1 - \mathbb{P}\{X_n < c + \varepsilon\} + \mathbb{P}\{X_n \leq c - \varepsilon\} \\ &\leq 1 - \mathbb{P}\left\{X_n \leq c + \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \mathbb{P}\{X_n \leq c - \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - 1 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $X_n \xrightarrow{P} c$

Reciprocamente, seja  $F_n$  a função distribuição acumulada de  $X_n$ ,  $n \geq 1$ . Fixamos  $x \in \mathbb{R}$  para todo  $x$  ponto de continuidade de  $F$ . Então para todo  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_n \leq x\} &\leq \mathbb{P}\{X \leq x + \varepsilon\} + \mathbb{P}\{X_n \leq x ; X > x + \varepsilon\} \\ &\leq \mathbb{P}\{X \leq x + \varepsilon\} + \mathbb{P}\{|X_n - c| > \varepsilon\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

E similarmente

$$\mathbb{P}\{X_n \leq x\} \geq \mathbb{P}\{X \leq x - \varepsilon\} - \mathbb{P}\{|X_n - c| > \varepsilon\}. \tag{2.6}$$

Logo, de (2.5) e (2.6) obtemos que

$$F(x - \varepsilon) - \mathbb{P}\{|X_n - c| > \varepsilon\} \leq F_n(x) \leq F(x + \varepsilon) + \mathbb{P}\{|X_n - c| > \varepsilon\}.$$

Como por hipótese temos que  $X_n \xrightarrow{P} c$  quando  $n \rightarrow \infty$  temos que

$$F(x - \varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq F(x + \varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{2.7}$$

Note que, para todo  $x \in \mathbb{R}$  ponto de continuidade de  $F$ , temos que  $F(x^-) = F(x)$ .

Portanto, quando  $\varepsilon \downarrow 0$  em (2.7) obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x) \quad \text{ou seja, } X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$$



- 8) Se  $X_n \xrightarrow{P} X$  então  $X_n \xrightarrow{D} X$  para demonstrar esta afirmação, basta, usar a volta do item anterior, item 7 e trocando  $c$  por  $X$ .
- 9) Convergência em distribuição não implica Convergência em probabilidade, ou seja.

$$X_n \xrightarrow{D} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$$

*Demonstração.* Seja  $X \sim N(0, 1)$  v.a que distribui normal. Seja  $X_n = -X$  para  $n = 1, 2, \dots$  assim  $X_n \sim N(0, 1)$ .  $X_n$  tem a mesma distribuição como função  $X$  para todo  $n$ , também, trivialmente,  $\lim_n F_n(x) = F(x)$  para todo  $x$ . Portanto,  $X_n \xrightarrow{D} X$ . Mas

$$\mathbb{P}[|X_n - X| > \epsilon] = \mathbb{P}[|2X| > \epsilon] = \mathbb{P}[|X| > \frac{\epsilon}{2}] \neq 0.$$

Então  $X_n$  não converge para  $X$  em probabilidade □

Na Figura 2 temos um breve resumo que ilustra as implicações entre os diferentes tipos de convergências

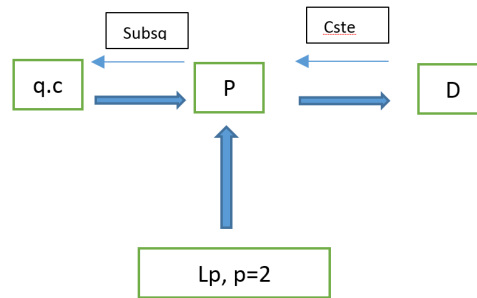


Figura 2 – Relação entre os tipos de convergência

## 2.5.4 Função característica e função geradora de momentos

**Definição 2.5.7. (Função característica)** A função característica de uma v.a.  $X$  com distribuição  $F_X$  é a função  $\Phi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por:

$$\Phi_X(z) = \mathbb{E}[e^{izX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} dF_X(x) \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

A função característica de uma variável aleatória é caracterizada completamente por sua função de distribuição: Duas variáveis com a mesma função característica são identicamente distribuídas.

Uma função característica é sempre uniformemente contínua, adicionalmente, as propriedades da suavidade da  $\Phi_X$  dependem da existência dos momentos  $m_k$  da variável aleatória definidos em (2.4.2). Os momentos de uma variável aleatória pode ou não

existir, dependendo de quão rápido a distribuição  $F_X$  decai no infinito. Os momentos de uma variável aleatória está relacionado com as derivadas em 0 da função característica. Para enunciar as propriedades vamos a considerar só o caso quando  $d = 1$ . A função característica verifica as propriedades:

1.  $\Phi_X(0) = 1$
2.  $|\Phi_X(t)| \leq 1$
3.  $\Phi_X(t)$  é uniformemente contínua.
4. Se  $X$  e  $Y$  são independentes, então  $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \cdot \Phi_Y(t)$
5. A função característica  $\Phi_X$  da v.a.  $X$  determina a função de distribuição de  $X$
6. Se  $X$  e v.a. e  $Y = aX + b$  então  $\Phi_Y(t) = e^{itb}\Phi_X(at)$
7. Se  $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$  então  $\Phi_X$  possui  $n$  derivadas contínuas para e

$$\Phi_X^{(k)}(t) = \int (ix)^k e^{itx} dF_X(x) \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

Em particular,  $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$ , de modo que a função característica é uma espécie de função geradora de momentos.

A demonstração das propriedades pode ser obtida em [(JAMES, 2004) Cap 6 seção 6.1]

**Exemplo 2.5.1.** *Seja uma v.a.  $X \sim N(0, 1)$ . Sua função característica é*

$$\Phi_X(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}. \quad (2.9)$$

*Mais ainda, se  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ , isto é  $Y = \sigma X + \mu$  e  $X \sim N(0, 1)$ . Sua função característica é*

$$\Phi_Y(z) = e^{iz\mu - \frac{(\sigma z)^2}{2}}. \quad (2.10)$$

Justifiquemos as igualdades acima. Note que pela propriedade 6., enunciada acima, basta considerar o caso  $X \sim N(0, 1)$ . Usando a definição (2.5.7) temos que

$$\Phi_X(z) = \mathbb{E}[e^{izX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} dF_X(x). \quad (2.11)$$

Onde  $dF_X$  representa a função de densidade da normal com media  $\mu$  e variância  $\sigma$  assim temos que

$$dF(X)(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}. \quad (2.12)$$

Como a v.a  $X$  tem media  $\mu = 0$  e variância  $\sigma = 1$ , então a expressão (2.12) muda para

$$dF(X)(x) = e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}. \quad (2.13)$$

Assim substituindo (2.13) em (2.11) temos que:

$$\begin{aligned} \Phi_X(z) &= \mathbb{E}[e^{izX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} dF_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{izx} e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{izx - \frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{2izx - x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2 - 2izx}{2}} dx. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Na última expressão (2.14) vamos a completar o quadrado, ou seja,

$$\begin{aligned} x^2 - 2izx &= x^2 - 2izx + (iz)^2 - (iz)^2 = [x^2 - 2izx + (iz)^2] - (iz)^2 \\ &= [x - iz]^2 - (iz)^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Substituindo (2.15) em (2.14) temos que

$$\begin{aligned} \Phi_X(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2 - 2izx}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{[x - iz]^2 - (iz)^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{[x - iz]^2}{2}} e^{-\frac{z^2}{2}} dx \\ &= e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{[x - iz]^2}{2}} dx = e^{-\frac{z^2}{2}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nosso trabalho estaria acabado se conseguirmos mostrar que a integral da expressão (2.16) é igual a 1, ou seja

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{[x - iz]^2}{2}} dx = 1.$$

Ou que seria equivalente se mostramos que:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{[x - iz]^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}. \quad (2.17)$$

Podemos reescrever a integral (2.17) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{[x - iz]^2}{2}} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{[x - iz]^2}{2}} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-\frac{[x - iz]^2}{2}} dx \quad \text{se } p = x - iz \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n - iz}^{n - iz} e^{-\frac{[p]^2}{2}} dp. \end{aligned}$$

Se formamos um retângulo de vértices  $(-n, 0)$ ,  $(n, 0)$ ,  $(-n, -z)$ ,  $(n, -z)$  no plano complexo e usamos o sentido anti-horário como direção, e definimos:

$I_1$  como o intervalo  $[-n - iz, n - iz]$  com direção de  $-n - iz$  para  $n - iz$ .

$I_2$  como o intervalo  $[n - iz, n]$  com direção, de  $n - iz$  para  $n$ .

$I_3$  como o intervalo  $[n, -n]$  com direção, de  $n$  para  $-n$  e finalmente fechando o retângulo definimos  $I_4$  o intervalo  $[-n, -n - iz]$  com direção, de  $-n$  para  $-n - iz$ .

Assim temos uma curva fechada, sabemos que a função  $f(z) = e^{-\frac{p^2}{2}}$  é analítica em  $\mathbb{C}$ , podemos usar o Teorema de Cauchy (ver [(SPIEGEL, 1964)]) (a integral de  $f$  sobre qualquer curva fechada dá zero). Por tanto

$$\int_{I_1} e^{-\frac{p^2}{2}} dp + \int_{I_2} e^{-\frac{p^2}{2}} dp + \int_{I_3} e^{-\frac{p^2}{2}} dp + \int_{I_4} e^{-\frac{p^2}{2}} dp = 0.$$

logo, isolando a integral de  $I_1$ , e usando o fato que  $x = 0$  e com  $p = -iz$ , temos que

$$\int_{I_1} e^{-\frac{p^2}{2}} dp = - \int_{I_2} e^{-\frac{p^2}{2}} dp - \int_{I_3} e^{-\frac{p^2}{2}} dp - \int_{I_4} e^{-\frac{p^2}{2}} dp.$$

$$\int_{-n-iz}^{n-iz} e^{-\frac{p^2}{2}} dp = - \int_{I_2} e^{-\frac{p^2}{2}} dp + \int_{-n}^n e^{-\frac{[z]^2}{2}} dz - \int_{I_4} e^{-\frac{p^2}{2}} dp. \quad (2.18)$$

agora a ideia é mostrar que

$$\int_{-n}^n e^{-\frac{[z]^2}{2}} dz \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[z]^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}. \quad (2.19)$$

E as duas integrais restantes são zero quando  $n$  vai para o infinito, ou seja

$$\int_{I_2} e^{-\frac{p^2}{2}} dp \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.20)$$

E de modo semelhante

$$\int_{I_4} e^{-\frac{p^2}{2}} dp \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.21)$$

Mostremos primeiro que a afirmação (2.19) é válida, assim temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[z]^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}. \quad (2.22)$$

Chamemos de  $K$  o termo (2.22), isto é,

$$\begin{aligned} K &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[z]^2}{2}} dz \\ K^2 &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[z]^2}{2}} dz \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[s]^2}{2}} ds \right] = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{[z]^2 + [s]^2}{2}} dz ds \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}([z]^2 + [s]^2)} dz ds. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Se fizermos a troca para coordenadas polares por  $z = r \cos(\theta)$  e  $s = r \sin(\theta)$  e substituimos em (2.23) temos que:

$$\begin{aligned} K^2 &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{[z]^2 + [s]^2}{2}} dz ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \quad \text{se } w = -r^2/2 \\ &= 2\pi \int_0^{-\infty} -e^w dw = 2\pi \int_{-\infty}^0 e^w dw = 2\pi \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^w dw \quad \text{integral imprópria} \\ &= 2\pi \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^0 - e^a] = 2\pi[1 - 0] = 2\pi. \end{aligned}$$

Assim  $K^2 = 2\pi$  portanto  $K = \sqrt{2\pi}$ , logo temos que a expressão (2.22) é válida, ou seja

$$K = \sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[z]^2}{2}} dz.$$

E finalmente mostremos que a afirmação (2.20) é verdadeira, e a demonstração da afirmação (2.21) é análoga. Sabemos que o comprimento do intervalo  $I_2$  é  $z$ , então basta provar que

$$\max_{p \in I_2} \left| e^{-\frac{p^2}{2}} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Primeiro temos que para  $p = n - iz$  com  $0 \leq s \leq z$ , podemos calcular o seguinte

$$p^2 = [n - iz]^2 = [n^2 - 2niz + (iz)^2] = [n^2 - (z)^2] - [2niz].$$

Assim podemos escrever a exponencial da seguinte forma:

$$e^{-\frac{p^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2}[n^2 - (z)^2 - 2niz]} = e^{-\frac{1}{2}[n^2 - (z)^2]} e^{niz}.$$

Como  $|e^{niz}| = 1$  para todo  $z \in \mathbb{R}$  portanto

$$\left| e^{-\frac{1}{2}[n^2 - (z)^2]} e^{niz} \right| = \left| e^{-\frac{1}{2}[n^2 - (z)^2]} \right| |e^{niz}| = \left| e^{-\frac{1}{2}[n^2 - (z)^2]} \right| = e^{\frac{1}{2}[(z)^2 - n^2]}.$$

Assim finalmente temos que

$$\max_{p \in I_2} \left| e^{-\frac{p^2}{2}} \right| = e^{\frac{1}{2}[(z)^2 - n^2]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

portanto fazendo  $n \rightarrow \infty$  na expressão (2.18) temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n-iz}^{n-iz} e^{-\frac{p^2}{2}} dp &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2}} dp \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ - \int_{I_2} e^{-\frac{p^2}{2}} dp + \int_{-n}^n e^{-\frac{[z]^2}{2}} dz - \int_{I_4} e^{-\frac{p^2}{2}} dp \right] \\ &= 0 + \sqrt{2\pi} + 0. \end{aligned}$$

como  $p = x - iz$  então

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2}} dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[x-iz]^2}{2}} dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 1.$$

Assim nossa afirmação inicial (2.9) é verdadeira, pois

$$\Phi_X(z) = e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{[x-iz]^2}{2}} dx = e^{-\frac{z^2}{2}} (1) = e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Conhecendo a definição e propriedades da função característica, vamos a enunciar duas proposições sobre a independência que são muito importantes e serão frequentemente utilizadas no texto.

Vamos considerar um conjunto de  $n$  v.a.  $\xi_1, \dots, \xi_n$  com funções característica  $\phi_1, \dots, \phi_n$ . Seja  $\phi$  a função característica do vector aleatório  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ . A condição de independência de  $\xi_1, \dots, \xi_n$  é facilmente expressada em termos de funções características.

**Proposição 2.5.1.** *[(KORALOV; SINAI, 2007)] Cap. 9. Seção 9.2] As v.a.  $\xi_1, \dots, \xi_n$  são independentes se e somente se*

$$\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \phi_1(\lambda_1) \cdots \phi_n(\lambda_n) \quad \text{para todo } (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

*Demonstração.* Se as v.a.  $\xi_1, \dots, \xi_n$  são independentes pela Proposição (2.3.1) temos que

$$\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathbb{E} \left[ e^{i(\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n)} \right] = \mathbb{E} \left[ e^{i(\lambda_1 \xi_1)} \right] \dots \mathbb{E} \left[ e^{i(\lambda_n \xi_n)} \right] = \phi_1(\lambda_1), \dots, \phi_n(\lambda_n).$$

Inversamente, suponha que

$$\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \phi_1(\lambda_1), \dots, \phi_n(\lambda_n).$$

Seja  $\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n$  v.a. independentes, que têm a mesma distribuição que  $\xi_1, \dots, \xi_n$  respectivamente, e, portanto, têm as mesmas funções características. Então a função característica do vector  $(\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n)$  é igual a  $\phi_1(\lambda_1), \dots, \phi_n(\lambda_n)$  pela primeira parte da Proposição. Portanto, a medida em  $\mathbb{R}^n$  induzida pelo vector  $(\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n)$  é a mesma que a medida induzida pela vector  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Assim as v.a.  $\xi_1, \dots, \xi_n$  também são independentes.  $\square$

**Proposição 2.5.2.** *[(KORALOV; SINAI, 2007)) Cap. 9. Seção 9.2] Se  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  é um vector aleatório gaussiano e tem  $Cov(\eta_i, \eta_j) = 0$  para  $i \neq j$ , então as v.a.  $\eta_1, \dots, \eta_n$  são independentes.*

*Demonstração.* Sejam  $e_i$  o vector cuja componente de  $i$ -ésima é igual a um e o resto das componentes são iguais a zero. se  $Cov(\eta_i, \eta_j) = 0$  para  $i \neq j$ , então a matriz de covariância  $B$  é diagonal, enquanto  $Cov(\eta_i, \eta_i) = B_{ii}$ . Por conseguinte, a função característica do vector aleatório  $\eta$  é

$$\phi(\lambda) = e^{i(\lambda, a) - \frac{1}{2} \sum_i B_{ii} \lambda_i^2}.$$

Mas, a função característica dos  $\eta_i$  é igual a

$$\phi_i(\lambda_i) = \mathbb{E}[e^{i\lambda_i \eta_i}] = \mathbb{E}[e^{i(\lambda_i e_i, \eta)}] = \phi(\lambda_i e_i) = e^{i\lambda_i a_i - \frac{1}{2} B_{ii}}.$$

Isto implica a independência das v.a. pela Proposição anterior, Proposição (2.5.1)  $\square$

**Definição 2.5.8. (Função geradora de momentos)** A função geradora de momentos de uma v.a.  $X$  é definida como sendo a função

$$M_X(u) = \mathbb{E}(e^{uX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{xu} dF_X \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

Ao contrário do que a função característica, que é sempre bem definida, a função geradora momento nem sempre é bem definida: A integral em (2.24) pode não convergir para alguns (o todos) os valores de  $u$ . A ligação entre a função geradora de momentos,  $M_X(*)$ , e os momentos,  $\mathbb{E}(X^n)$ , de uma variável aleatória  $X$  é dada pelo seguinte Teorema.

**Teorema 2.5.5.** *Seja  $X$  uma variável aleatória e suponhamos que exista  $\epsilon > 0$  tal que  $M_X(u)$  seja finito para todo  $|u| < \epsilon$ . Então valem as seguintes afirmações.*

1.  $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$  para todo  $n \geq 1$

2.  $M_X(u) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!}$  para todo  $|u| < \epsilon$ ;
3.  $M_X$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$  em  $(-\epsilon, +\epsilon)$  e, além disso, a  $n$ -ésima derivada de  $M_X$  é dada por

$$M_X^{(n)}(u) = \mathbb{E}(e^{uX} X^n). \quad (2.25)$$

Para todo  $|u| < \epsilon$ .

Em particular temos que

$$M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n). \quad (2.26)$$

A demonstração pode ser obtida em [(ATHREYA; LAHIRI, 2006) Cap. 6 seção 6.2]. A função geradora de momentos define de forma unívoca a distribuição da variável aleatória, ou seja, dada  $M_X(t)$  existe apenas uma função de distribuição  $F_X$  que a gera.

## 2.6 Leis dos Grandes Números e Teorema Central do Limite

Entre outras coisas, a lei dos grandes números nós permite formalizar a ideia que à medida que o número de repetições de um experimento cresce, a frequência relativa  $f_A$  de algum evento  $A$  converge (quase certamente) para a probabilidade teórica  $\mathbb{P}(A)$ . É este fato que nos permite estimar o valor da probabilidade de um evento  $A$ , baseado na frequência relativa de  $A$  em um grande número de repetições de um experimento.

Dado o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ . Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias integráveis, ou seja, com esperanças finitas e  $S_1, S_2, \dots, S_n$  suas somas parciais dadas por  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Definimos a lei fraca dos grandes números como

**Definição 2.6.1. (Lei fraca dos Grandes Números).** Dizemos que a sequência de v.a.  $(X_1, X_2, \dots)$  satisfaz a lei fraca dos Grandes Números se para todo  $\epsilon > 0$ , vale

$$\mathbb{P} \left[ \left| \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \right| \geq \epsilon \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ou seja, se} \quad \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0$$

**Teorema 2.6.1. (Lei fraca de Chebyshev).** Seja  $X_n$  uma sequência enumerável de v.a. independentes dois a dois que tem variância finita e uniformemente limitada, ou seja, existe uma constante  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $V[X_n] \leq c$ . Então a sequência de v.a.  $(X_1, X_2, \dots)$  satisfaz a lei fraca dos grandes números, ou seja, se

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0$$

*Demonstração.* Como  $X_n$  são independentes, usando corolário (2.4.1), temos que,  $V[S_n] = \sum_{i=1}^n V[X_i] \leq nc$ , logo usando a desigualdade de Chebyshev, propriedade (4) da variância, temos que

$$\mathbb{P}[|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \geq \varepsilon n] \leq \frac{\text{Var}[S_n]}{\varepsilon^2 n^2} \leq \frac{c}{\varepsilon^2 n^2} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

□

No texto [(JAMES, 2004) Cap 5. seção 5.1 e 5.2], podemos encontrar três leis fracas Chebyshev, Bernoulli e Khintchine. Definimos a lei forte dos grandes números como

**Definição 2.6.2. (*Lei forte dos Grandes Números*).** Dizemos que as v.a.  $(X_1, X_2, \dots)$  satisfaz a Lei forte dos Grandes Números se

$$\mathbb{P}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} = 0\right] = 1 \quad \text{ou seja, se } \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \xrightarrow{q.c.} 0$$

**Teorema 2.6.2. (*A Lei Forte de Kolmogorov*)** Seja  $X_i$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e com  $\mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty$ . Então

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \rightarrow \mu, \text{ quase certamente.}$$

No texto [(JAMES, 2004) Cap 5. seção 5.3], podemos encontrar a demonstração.

A principal diferença entre a lei fraca e a lei forte dos grandes números é que a primeira converge em probabilidade e a segunda converge quase certamente. A convergência em probabilidade é uma convergência mais fraca que a convergência quase certa, pois se houver convergência quase certa há convergência em probabilidade. No texto [(JAMES, 2004) Cap 5. seção 5.3], podemos encontrar duas leis fortes Kolmogorov e Borel. Consideremos uma sequência de v.a. independentes,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , definidas no mesmo espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ , e seja  $S_1, S_2, \dots$  a sequência de somas parciais definidas por  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . A lei dos grandes números trata da convergência de  $\frac{1}{n}(S_n - \mathbb{E}[S_n])$  para 0, quando  $n \rightarrow \infty$  supondo que as v.a.  $X_i$ 's sejam integráveis. Quando a sequência obedece à lei dos grandes números, existe uma tendência da v.a.  $\frac{S_n}{n}$  a média amostral no caso de v.a. independentes e identicamente distribuídas, para concentrar-se em torno de sua média. O Teorema Central do Limite abreviado (TCL) prova que sob certas hipóteses gerais, a distribuição da média amostral padronizada tende à normal. O problema consiste em achar condições sob as quais

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{V[S_n]}} \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

Resumidamente, estas condições exigem que cada parcela da soma contribua com um valor sem importância para a variação da soma, ou seja, é muito improvável que qualquer parcela isolada dê uma contribuição muito grande para a soma. O Teorema Central do Limite dá apoio ao uso da normal como distribuição de erros, pois em muitas situações



reais é possível interpretar o erro de uma observação como resultante de muitos erros pequenos e independentes. Há também outras situações que o (TCL) pode justificar o uso da normal. Por exemplo, a distribuição de alturas de homens adultos de certa idade pode ser considerada aproximadamente normal, pois a altura pode ser pensada como soma de muitos efeitos pequenos e independentes.

Existem vários Teoremas Centrais do Limite (TCL) Lindeberg, Lyapunov ver [ (JAMES, 2004) Cap 7. seção 7.1] que variam de acordo com as hipóteses sobre as distribuições das v.a.  $X_i$ 's na sequência.

**Teorema 2.6.3.** (*Teorema Central do Limite para v.a. i.i.d.*).

Seja  $\{X_n; n \geq 1\}$  uma sequência de v.a.'s i.i.d., com média comum  $\mu$  e variância comum  $\sigma^2$  onde  $0 < \sigma^2 < \infty$ . Seja  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Então

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{V[S_n]}} \xrightarrow{D} N(0, 1) \quad \text{isto é} \quad \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

A demonstração pode ser obtida em [(JAMES, 2004) Cap 7. seção 7.1].



## 3 Movimento browniano (MB)

Neste capítulo apresentamos a definição de movimento browniano, provamos sua existência e investigamos algumas propriedades de suas trajetórias. Por exemplo, não-diferenciabilidade, invariância, auto similaridade, *Hölder* continuidade e variação quadrática. Para a prova da existência, exibiremos duas construções do MB, a primeira construção vai ser de forma recursiva, conhecida como a construção de Lévy, a segunda construção, vai ser de forma intuitiva, usando passeios aleatórios discretos simples e simétricos.

Iniciamos com uma breve introdução sobre processo estocástico e informalmente, algumas de suas caracterizações.

### 3.1 Processos estocásticos

Fixado um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  e uma família de índices  $T$ , um processo estocástico  $\{X_t; t \in T\}$  é uma coleção de v.a  $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{R}^d$ ) para cada  $t \in T$ .

Note que se  $X := \{X(t, \omega); t \in T, \omega \in \Omega\}$  é um processo estocástico, ele é uma função de dois argumentos, para  $t \in T$  fixo,  $X(t, *)$  é uma v.a e para  $\omega$  fixo,  $X(*, \omega)$  é uma função do tempo também chamada de realização ou trajetória do processo estocástico.

Esta coleção de v.a. serve como um modelo para a representação da evolução aleatória de um sistema ao longo do tempo. Em geral, as v.a. que compreendem um processo não são independentes uma das outras, o mais comum é ter relações de dependência umas com outras. As diferentes formas que você pode tomar essas dependências é uma das características que distinguem um processo de outro.

Um processo estocástico pode ser visto como um modelo matemático para a ocorrência, em cada tempo  $t \in T$ , de um fenômeno aleatório. A aleatoriedade é capturada por meio de um espaço probabilidade. Para cada ponto fixado  $\omega \in \Omega$ , a função  $t \mapsto X_t(\omega); t \in T$  é uma realização do processo  $X$  associado com  $\omega$ . Por exemplo, o número de clientes em uma fila, o movimento de uma partícula sujeito a perturbações aleatórias, o número de chamadas recebidas em uma central telefônica, dentre outros.

Vamos considerar  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{R}^d$ ) dotados com a  $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mathcal{B}$ . A variável  $t$  usualmente representa o tempo. Quando  $T$  é enumerável, dizemos que o processo é a tempo *discreto*, quando  $T$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$ , limitado ou não, dizemos que o processo é a tempo *contínuo*. Dois exemplos clássicos são,  $T = \mathbb{N}$  e  $T = [0, \infty)$ . Neste texto, a menos que explicitado, adotaremos estas duas possíveis situações para a família de tempos  $T$ .

Vamos adotar que um processo estocástico  $X$  está determinado se conhecemos todas as suas distribuições conjuntas finitas  $F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}$  para qualquer conjunto finito de índices  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ . Mais precisamente, os processos  $X$  e  $Y$  são iguais se

$$P(X_{t_1} \in \Gamma_1, X_{t_2} \in \Gamma_2, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n) = P(Y_{t_1} \in \Gamma_1, Y_{t_2} \in \Gamma_2, \dots, Y_{t_n} \in \Gamma_n)$$

Para quaisquer  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$  e  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{B}$ . Cabe ressaltar que está não é a única maneira de determinar um processo, veja por exemplo, [(KARATZAS; SHREVE, 1991) Cap 1 seção 1.1].

Os diferentes tipos de processos estocásticos são obtidos quando se considera diferentes possibilidades para o espaço de parâmetros ou para o espaço de estados, ou para as características das trajetória e suas relações, e principalmente sobre a relação de dependência e independência entre as v.a. envolvidas no processo. Algumas classes bem conhecidas serão abordadas no capítulo seguinte.

## 3.2 Movimento browniano

A história começa em 1785, quando Jan Ingenhousz (1730-1799), descobriu o processo da fotossíntese, ele relatou o movimento em ziguezague das partículas em suspensão de pó de carvão na superfície do álcool, que depois seria chamado movimento browniano, devido ao relatório de Robert Brown (1773-1858) feito em 1827, observando partículas de pólen na superfície da água que exibem incessantes movimentos irregulares. O primeiro a descrever matematicamente o movimento browniano foi Thorvald N. Thiele em 1880, em um artigo sobre o *método dos mínimos quadrados*. Ele foi seguido independentemente por Louis Bachelier em 1900 em sua tese de doutorado *A Teoria da Especulação*, no entanto, Albert Einstein em 1905 com um estudo independente explicou estes movimentos postulando que as partículas sob observação estão sujeitas a perpétuas colisões com moléculas do meio circundante. O tratamento matematicamente rigoroso do movimento browniano só foi dado em 1923 por Norbert Wiener (1894–1964) que mostrou ser suas funções amostras contínuas e não diferenciáveis (com probabilidade 1). No entanto, seu método era aplicável ao caso específico desse processo e somente após o estabelecimento por Kolmogorov, em 1929-1933, dos fundamentos axiomáticos da teoria de probabilidade foi possível o tratamento rigoroso dos processos estocásticos em geral, como são conhecidos hoje.

Um modelo mais refinado para o movimento físico browniano foi proposto por Langevin (1909), Ornstein e Uhlenbeck (1930). Como já sabemos que a teoria matemática do movimento browniano foi colocada em uma base rigorosa por Wiener (1923), que construiu uma distribuição associada como uma medida no espaço de caminhos contínuos. A importância do revolucionário artigo de Wiener não foi plenamente reconhecida até depois do trabalho pioneiro de Kolmogorov (1931a, 1933-1956), Lévy (1934-1935), e Feller (1936). Wiener também introduziu integrais estocásticas para L2-funções deterministas,

que foram mais tarde estudadas em maior detalhe por Paley, Wiener, e Zygmund (1933). A expansão de funcionais brownianos caóticos foi descoberto por Wiener (1938), e a teoria de integrais múltiplas com respeito ao movimento browniano foi desenvolvido em um artigo de Itô (1951c). A lei do logaritmo iterado foi descoberto por Khinchin, primeiro (1923, 1924) para sequências de Bernoulli, e depois (1933–48) para movimento browniano. Um estudo sistemático das trajetórias do movimento browniano foi iniciado por Lévy (1937–1954, 1948–1965), que demonstrou a existência da variação quadrática em (1940) e as leis em arco-seno (1939, 1948–1965). Apesar de ter muitas provas sobre esse fato, a dedução baseada nas propriedades de simetria básica, foi uma novidade. A propriedade forte de Markov foi usada implicitamente na obra de Lévy e outros, mas o resultado não foi cuidadosamente definido e provado até Hunt (1956).

Muitos textos de probabilidade modernos contêm introduções detalhadas para o movimento browniano. os livros de Itô e McKean (1965–96), Freedman (1971–83b), Karatzas and Shreve (1988–91), e Revuz and Yor (1991–94) para ter uma riqueza de informações adicionais sobre o assunto e outras informações em integrais múltiplas Wiener-Itô por Kallianpur (1980), Dellacherie, Maisonneuve, e Meyer (1992), e Nualart (1995).

Depois da breve introdução histórica, nós dispomos a falar sobre o objetivo desta seção, que é demonstrar que o MB é um processo Gaussiano, mas inicialmente, falaremos de passeios aleatórios, e como inicialmente, de forma intuitiva podemos construir o MB, e como de forma secundária podemos construir o MB, usando a construção feita por Lévy e como consequência enunciar uma definição do MB. falemos um pouco de passeios aleatórios. Na figura (3) um típico movimento browniano em duas dimensões.

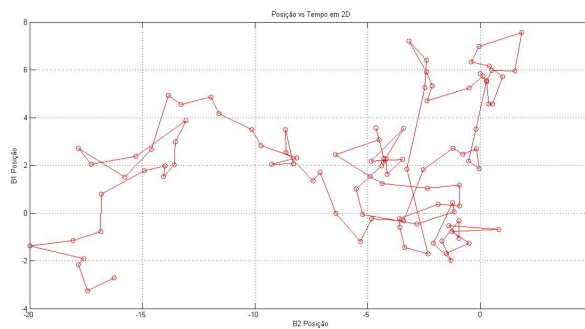


Figura 3 – Movimento browniano planar para 100 passos

**Definição 3.2.1. (*Movimento browniano standard (MBS)*)** Fixado um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ . O movimento browniano  $(B_t)_{t \geq 0}$  é um processo estocástico em  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} B(.,.) : \Omega \times [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, t) &\mapsto B(\omega, t) = B_t(\omega). \end{aligned}$$

Satisfazendo:

1. Para quase todo  $\omega \in \Omega$  fixado,  $B(\omega, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $B_0(\omega) = B(\omega, 0) = 0$  (começa em zero q.c).
2. Para uma partição arbitrária  $0 \leq t_1 \leq t_2, \dots, \leq t_n$  as v.a.

$$B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}, \dots, B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_1}.$$

São independentes. Dizemos que o processo  $B_t$  tem **incrementos independentes**.

3. A distribuição do incremento  $B_{t+h} - B_t$  não depende de  $t$ , ou seja, tem **incrementos estacionários**.
4.  $B_t$  tem distribuição *normal* com média zero e variância  $t$ , isto é,  $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ .

Na figura 4 temos trajetórias típicas do um MB em  $[0, 1]$ .

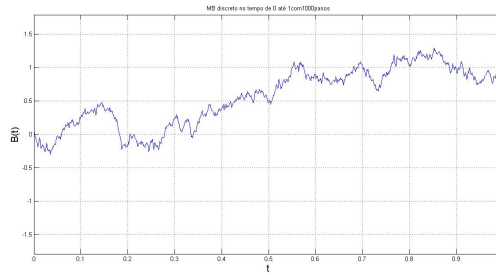


Figura 4 – Movimento browniano  $B_t$  em  $[0, 1]$

Observações: O item 2. significa que os "movimentos" ou deslocamentos que o processo tem nestes intervalos disjuntos do tempo são independentes um do outro.

O item 3. significa que dado  $s < t$  o incremento que o processo  $B$  têm entre os tempos  $s$  e  $t$  só depende da diferença  $t - s$  e não depende dos valores específicos  $s$  e  $t$  e no item 4. note que a v.a.  $B_t - B_s$  tem distribuição com média zero e variância  $t - s$ , isto é,  $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ .

**Exemplo 3.2.1.** Calcular  $\mathbb{P}[B_5 \leq 3]$ , ou seja, qual é a probabilidade do MB ser menor ou igual a 3 no instante  $t = 5$ . Sabemos que  $B_5 \sim \mathcal{N}(0, 5)$ , assim,  $\frac{B_5}{\sqrt{5}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , então

$$\mathbb{P}[B_5 \leq 3] = \mathbb{P}\left[\frac{B_5}{\sqrt{5}} \leq \frac{3}{\sqrt{5}}\right] = \int_{-\infty}^{\frac{3}{\sqrt{5}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \approx 0.910.$$

Onde a aproximação foi obtida usando software Matlab. Também poderíamos usar estimativas para a variável gaussiana obtidas no capítulo 2. Assim, com 91/100 de chance uma trajetória típica do MB será, menor do que ou igual a 3, no instante  $t = 5$ .

**Exemplo 3.2.2.** Calcular  $\mathbb{P}[B_8 - B_6 \leq -\frac{3}{2}]$ , ou seja, a probabilidade que a variação do MB esteja entre os tempos  $t = 6$  e  $t = 8$  quando é menor ou igual a  $-\frac{3}{2}$ . Sabemos que

$$B_8 - B_6 \sim \mathbf{N}(0, 8 - 6) = \mathbf{N}(0, 2)$$

Assim,  $\frac{B_8 - B_6}{\sqrt{2}} \sim \mathbf{N}(0, 1)$ , então

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[B_8 - B_6 \leq -\frac{3}{2}] &= \mathbb{P}\left[\frac{B_8 - B_6}{\sqrt{2}} \leq -\frac{3}{2\sqrt{2}}\right] = \mathbb{P}\left[\frac{B_6 - B_8}{\sqrt{2}} \geq \frac{3}{2\sqrt{2}}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\frac{B_2}{\sqrt{2}} \geq \frac{3}{2\sqrt{2}}\right] = \int_{\frac{3}{2\sqrt{2}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \approx 0.144. \end{aligned}$$

Assim, entre os tempos  $t = 6$  e  $t = 8$ , a variação do MB é menor ou igual a  $-\frac{3}{2}$  ocorre com probabilidade 0,144.

Calculemos a covariância do MB. Sem perda de generalidade tomemos  $s < t$ . Usando a linearidade da esperança e que  $B_0 = 0$ , temos que

$$\begin{aligned} Cov[B_t, B_s] &= \mathbb{E}[(B_t - \mathbb{E}[B_t])(B_s - \mathbb{E}[B_s])] \\ &= \mathbb{E}[B_t B_s - B_t \mathbb{E}[B_s] - B_s \mathbb{E}[B_t] + \mathbb{E}[B_t] \mathbb{E}[B_s]] \\ &= \mathbb{E}[B_t B_s - 0 - 0 + 0 * 0] = \mathbb{E}[B_t B_s]. \end{aligned}$$

Ou seja,  $Cov[B_t, B_s] = \mathbb{E}[B_t B_s]$ . Mas

$$\begin{aligned} B_t B_s &= (B_t - B_s + B_s) B_s = [B_t B_s - B_s^2 + B_s^2] \\ &= [B_s(B_t - B_s) + B_s^2] = (B_s - B_0)(B_t - B_s) + B_s^2. \end{aligned}$$

Usando o fato que  $B_s - B_0$  é independente de  $B_t - B_s$  temos

$$\begin{aligned} Cov[B_t, B_s] &= \mathbb{E}[B_t B_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s) B_s] \\ &= \mathbb{E}[(B_s - B_0)(B_t - B_s)] + \mathbb{E}[B_s^2] \\ &= s = t \wedge s = \min(s, t). \end{aligned}$$

Se  $t = s$  o resultado trivial.

Lembremos que o coeficiente de correlação entre duas v.a. é dado por

$$\rho_{xy} = \frac{Cov[X, Y]}{\sqrt{V[X]} \sqrt{V[Y]}}.$$

Então, podemos calcular a correlação entre dois MB,  $B_t$  e  $B_s$ , da forma

$$\rho_{st} = \frac{Cov[B_t, B_s]}{\sqrt{V[B_t]} \sqrt{V[B_s]}} = \frac{\min(s, t)}{\sqrt{t} \sqrt{s}}. \quad (3.1)$$

**Definição 3.2.2.** *Seja  $B_t$  um MB. O MB começando em  $x \in \mathbb{R}$  é o processo  $B_t^x = x + B_t$*

Se o processo  $B_t$  é iniciado em  $x$ , então,  $B_t$  tem distribuição normal com média  $x$  e variância  $t$ , isto é,  $B_t^x \sim \mathbf{N}(x, t)$ . Isto pode ser escrito como

$$\mathbb{P}_x[B_t \in (a, b)] = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dy.$$

Onde  $\mathbb{P}_x$  indica a probabilidade quando o processo é iniciado em  $x$ . A função dentro a integral acima é chamada de densidade de probabilidade de MB

$$p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}. \quad (3.2)$$

Sabemos pela definição (3.2.2) que o MB pode começar em  $x$ . Neste caso para  $x, y \in \mathbb{R}^d$  podemos denotar a função de densidade de probabilidade como

$$p_t(x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{2t}}.$$

Similarmente,  $B_t^x - x$  é um MB iniciado em 0. Se não for especificado, assumimos  $B_0 = 0$ , ou seja, o processo é iniciado em 0.

Podemos considerar como movimento browniano  $d$ -dimensional como o processo estocástico

$$B = (B_t)_{t \in [0, \infty)} \left( (B_t^1, \dots, B_t^d) \right)_{t \in [0, \infty)}.$$

Com valores em  $\mathbb{R}^d$  de tal modo que cada um dos componentes  $(B_t^1)_{t \in [0, \infty)}, \dots, (B_t^d)_{t \in [0, \infty)}$  é um movimento browniano unidimensional e os movimentos brownianos  $B_t^1, \dots, B_t^d$  são independentes. Em outras palavras, um movimento browniano  $d$ -dimensional é um processo em que cada componente executa uma movimento browniano, e as componentes são movimentos brownianos independentes.

Uma observação, o movimento browniano  $d$ -dimensional não compartilha todas as propriedades do movimento browniano unidimensional. Por exemplo, para  $d = 1, 2$  os movimentos brownianos são **recorrentes** e para  $d \geq 3$  movimento browniano é **transcendente**, isto será explicado em detalhe na seção do movimento browniano como um processo de Markov. Em todo o texto só estamos interessados em estudar o movimento browniano unidimensional, o caso  $d$ -dimensional só será mencionado na seção (4.1).

### 3.2.1 Existência Movimento browniano (MB)

O objetivo principal desta seção é dar uma prova da existência do MB, usando a construção de Lévy. Começamos com uma aproximação linear em uma partição do intervalo  $[0, 1]$ , que é nossa primeira iteração, onde nos extremos temos v.a. *normais*. Isto é feito em cada iteração, dividindo cada sub-intervalos em seus "pontos" "médios", os chamados pontos diádicos em  $[0, 1]$  e obtendo uma sequência de variáveis normais que atende



a definição de MB. A cada etapa a aproximação linear será dividida em pedaços cada vez mais pequenos e redefinida nos novos pontos de modo a termos uma sequência de v.a. *normais*; a ideia é mostrar que essa sequência de interpolações lineares, ou aproximações lineares que são funções contínuas converge para uma função contínua, que é um processo com as propriedades do MB.

Vamos precisar do seguinte Lema em cada iteração de "pontos médios" de nossa construção.

**Lema 3.2.1.** *fixado um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ . Sejam  $s < t$  e  $X_t, X_s$  v.a. tais que  $X_t - X_s$  tem distribuição normal com média zero e variância  $t - s$ , ou seja  $X_t - X_s \sim \mathbf{N}(0, t - s)$ . Então existe uma v.a.  $X_{\frac{t+s}{2}}$  tal que*

$$X_{\frac{t+s}{2}} - X_t \text{ e } X_s - X_{\frac{t+s}{2}}.$$

*São independentes e tem a mesma distribuição normal com média zero e variância  $\frac{t-s}{2}$ , ou seja,*

$$X_{\frac{t+s}{2}} - X_t \sim \mathbf{N}(0, \frac{t-s}{2}) \sim X_s - X_{\frac{t+s}{2}}.$$

*Demonstração.* Seja  $U = X_t - X_s$  e  $V$  v.a. independente de  $U$  tal que também tem distribuição  $\mathbf{N}(0, t - s)$ , ou seja,

$$V \sim \mathbf{N}(0, t - s) \sim U.$$

Defina  $X_{\frac{t+s}{2}} := X_t - \left(\frac{U+V}{2}\right)$  assim temos que

$$\begin{aligned} X_{\frac{t+s}{2}} &= X_t - \left(\frac{(X_t - X_s) + V}{2}\right) = \frac{X_t + X_s}{2} - \frac{V}{2} = X_s + \left(\frac{(X_t - X_s) + V}{2}\right) \\ &= X_s + \left(\frac{U + V}{2}\right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$X_{\frac{t+s}{2}} - X_s = X_t - X_{\frac{t+s}{2}} = \frac{U + V}{2} \sim \mathbf{N}\left(0, \frac{t-s}{2}\right).$$

Em consequência,

$$X_{\frac{t+s}{2}} - X_s \text{ e } X_t - X_{\frac{t+s}{2}}.$$

Tem distribuição comum, uma *normal*  $\mathbf{N}(0, \frac{t-s}{2})$ . Além disso, elas são independentes, já que  $U + V$  e  $U - V$  são não correlacionadas, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[(U + V), (U - V)] &= \mathbb{E}[(U + V)(U - V)] - \mathbb{E}[(U + V)]\mathbb{E}[(U - V)] \\ &= \mathbb{E}[(U + V)(U - V)] - 0 = \mathbb{E}[(U)^2] - \mathbb{E}[(V)^2] = 0. \end{aligned}$$

O que termina a demonstração do Lema. □

Iremos construir o movimento browniano no intervalo de tempo  $[0, 1]$ . Definamos o conjunto de pontos  $D_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : k = 0, 1, \dots, 2^n \right\}$  e seja  $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ . Vamos primeiro construir uma família de v.a.  $X_t$  onde  $t \in [0, 1] \cap D$ , que cumpre com as propriedades do MB, definição (3.2.1). Seja  $\{Z_d\}_{d \in D}$  uma coleção de v.a. independentes com distribuição  $\mathbf{N}(0, 1)$ . Para cada  $d \in D_n$ ,  $d = k/2^n$ , denote  $Z_k^n = Z_d$ . Considere  $X_0^0 = 0$  e  $X_1^0 = Z_1^0$ .

Nossa primeira aproximação sera feita em  $D_0 = [0, 1]$ , pois terminada esta construção, podemos usar a mesma metodologia, para  $D_1 \setminus D_0$ . O estágio inicial vai ser o valor do movimento browniano no tempo  $t = 1$ , com  $X_0^0 = 0$  e  $X_1^0 = Z_1^0$ , onde  $Z_1^0$  é uma v.a. gerada *normal*,  $\mathbf{N}(0, 1)$ , e todos os outros  $X_t^0$  são interpolações lineares destes pontos

$$X_t^0 = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0 \\ Z_1^0 t & \text{se } 0 < t < 1 \\ Z_1^0 & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

Vamos utilizar apenas a informação que passa através da trajetória de dois pontos  $(0, 0)$  e  $(1, Z_1^0)$ , para obter a interpolação linear  $X_t^{(0)}$ , ou seja,  $X_t^{(0)} = Z_1^0 t$ . Esta será nossa primeira aproximação "grosseira" de uma trajetória, a Figura 5 ilustra esta primeira situação

A segunda aproximação é construída a partir da primeira, onde as duas extremidades

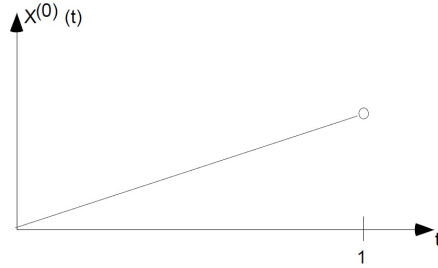


Figura 5 – Primeira iteração  $X_t^{(0)}$

são fixadas, ou seja,  $X_0^1 = X_0^0 = 0$  e  $X_1^1 = X_1^0 = Z_1^0$  e vamos a pegar o ponto médio do intervalo  $[0, 1]$ . Tendo em conta os valores já gerados. Assim temos que

$$X_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} (X_0^0 + X_1^0) + \frac{1}{2} Z_1^1.$$

Os outros pontos do percurso são obtidos por as interpolações lineares.

$$X_t^1 = \begin{cases} X_0^0 & \text{se } t = 0 \\ \frac{1}{2} (X_0^0 + X_1^0) + \frac{1}{2} Z_1^1 & \text{se } t = \frac{1}{2} \\ Z_1^0 & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

Observe que  $X_0^1 = X_0^0 = 0$  e

$$\begin{aligned} X_{\frac{1}{2}}^1 &= \frac{1}{2} (X_0^0 + X_1^0) + \frac{1}{2} Z_1^1 = \frac{1}{2} (0 + Z_1^0) + \frac{1}{2} Z_1^1 = \frac{1}{2} (Z_1^0 + Z_1^1) \\ &\sim \mathbf{N}\left(0, \frac{1}{4}(1+1)\right) = \mathbf{N}\left(0, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Mas  $X_1^1 = X_1^0 = Z_1^0 \sim \mathbf{N}(0, 1)$  o que implica que

$$\begin{aligned} X_1^1 - X_{\frac{1}{2}}^1 &= X_1^0 - \left( \frac{1}{2} (X_0^0 + X_1^0) + \frac{1}{2} Z_1^1 \right) \\ &= Z_1^0 - \left( \frac{1}{2} (0 + Z_1^0) + \frac{1}{2} Z_1^1 \right) = \frac{1}{2} (Z_1^0 - Z_1^1) \sim \mathbf{N}(0, \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

E também temos que

$$X_{\frac{1}{2}}^1 - X_0^1 = \left( \frac{1}{2} (0 + Z_1^0) + \frac{1}{2} Z_1^1 \right) - X_0^0 = \frac{1}{2} (Z_1^0 - Z_1^1) \sim \mathbf{N}(0, \frac{1}{2}).$$

Usando Lema anterior, Lema (3.2.1), temos que as v.a.  $X_1^1 - X_{\frac{1}{2}}^1$  e  $X_{\frac{1}{2}}^1 - X_0^1$  são independentes. A situação da segunda iteração são apresentadas na figura 6.

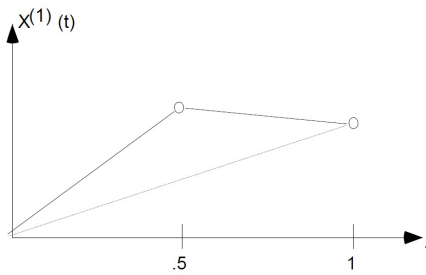


Figura 6 – Segunda iteração  $X_t^{(1)}$

Agora, a terceira aproximação é obtida da segunda aproximação, vamos escolher os pontos médios, dos intervalos  $(0, \frac{1}{2})$  e  $(\frac{1}{2}, 1)$ , ou seja, os pontos  $(0, \frac{1}{4})$  e  $(\frac{3}{4}, 1)$  e definimos  $X_t^2$  como

$$X_t^2 = \begin{cases} X_0^1 & \text{se } t = 0 \\ \frac{1}{2} (X_0^1 + X_{\frac{1}{2}}^1) + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_1^2 & \text{se } t = \frac{1}{4} \\ X_{\frac{1}{2}}^1 & \text{se } t = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} (X_{\frac{1}{2}}^1 + X_1^1) + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_3^2 & \text{se } t = \frac{3}{4} \\ X_1^1 & \text{se } t = 1. \end{cases}$$

Observe que  $X_0^2 = X_0^1 = 0$  e

$$\begin{aligned} X_{\frac{1}{4}}^2 &= \frac{1}{2} (X_0^1 + X_{\frac{1}{2}}^1) + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_1^2 = \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{1}{2} (Z_1^0 + Z_1^1) \right) + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_1^2 \\ &= \frac{1}{4} Z_1^0 + \frac{1}{4} Z_1^1 + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_1^2 \sim \mathbf{N}(0, \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8}) = \mathbf{N}(0, \frac{1}{4}). \end{aligned}$$

Mas

$$X_{\frac{1}{2}}^2 = X_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} (Z_1^0 + Z_1^1) \sim \mathbf{N}(0, \frac{1}{2}).$$

Assim

$$\begin{aligned} X_{\frac{3}{4}}^2 &= \frac{1}{2} (X_{\frac{1}{2}}^1 + X_1^1) + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_3^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} (Z_1^0 + Z_1^1) + Z_1^1 \right) + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_3^2 \\ &= \frac{3}{4} Z_1^0 + \frac{1}{4} Z_1^1 + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_3^2 \sim \mathbf{N}(0, \frac{9}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8}) = \mathbf{N}(0, \frac{3}{4}). \end{aligned}$$

logo  $X_1^2 = X_1^1 = Z_1^0 \sim \mathbf{N}(0, 1)$ . O que implica que

$$\begin{aligned} X_1^2 - X_{\frac{3}{4}}^2 &= Z_1^0 - \left( \frac{3}{4}Z_1^0 + \frac{1}{4}Z_1^1 + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}Z_3^2 \right) \\ &= \frac{1}{4}Z_1^0 - \frac{1}{4}Z_1^1 - \frac{3}{4}Z_1^0 + \frac{1}{4}Z_1^1 - \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}Z_3^2 \\ &\sim \mathbf{N}\left(0, \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8}\right) = \mathbf{N}\left(0, \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

E também temos

$$\begin{aligned} X_{\frac{3}{4}}^2 - X_{\frac{1}{2}}^2 &= \left( \frac{3}{4}Z_1^0 + \frac{1}{4}Z_1^1 + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}Z_3^2 \right) - \frac{1}{2}(Z_1^0 + Z_1^1) \\ &= \frac{1}{4}Z_1^0 - \frac{1}{4}Z_1^1 + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}Z_3^2 \\ &\sim \mathbf{N}\left(0, \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8}\right) = \mathbf{N}\left(0, \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{\frac{1}{2}}^2 - X_{\frac{1}{4}}^2 &= \frac{1}{2}(Z_1^0 + Z_1^1) - \left( \frac{1}{4}Z_1^0 + \frac{1}{4}Z_1^1 + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}Z_1^2 \right) \\ &= \frac{1}{4}Z_1^0 + \frac{1}{4}Z_1^1 - \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}Z_1^2 \\ &\sim \mathbf{N}\left(0, \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8}\right) = \mathbf{N}\left(0, \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

E finalmente

$$X_{\frac{1}{4}}^2 - X_0^2 = X_{\frac{1}{4}}^2 \sim \mathbf{N}\left(0, \frac{1}{4}\right).$$

Usando Lema anterior, Lema (3.2.1), temos que as v.a.  $X_1^2 - X_{\frac{3}{4}}^2$ ,  $X_{\frac{3}{4}}^2 - X_{\frac{1}{2}}^2$ ,  $X_{\frac{1}{2}}^2 - X_{\frac{1}{4}}^2$  e  $X_{\frac{1}{4}}^2 - X_0^2$  são independentes entre se. A aproximação  $X_t^{(2)}$  é, então, definida como sendo a interpolação linear por partes da simulação dos valores que obtivemos para os tempos  $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ , e 1. Na figura 7 temos o diagrama da situação na terceira interação de nossa aproximação.

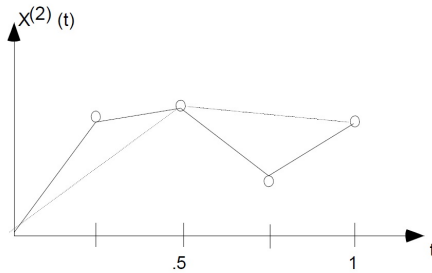


Figura 7 – Terceira interação  $X^{(2)}(t)$

Em geral, para ir da interpolação linear  $X^{(n)}$  para  $X^{(n+1)}$ , geramos  $2^n$  novas v.a. independentes *normais*  $Z_{2^n+1}^{n+1}, Z_{2^n+2}^{n+1}, \dots, Z_{2^{n+1}}^{n+1}$  e multiplicamos por um desvio padrão condicional apropriado,  $\sqrt{2^{-n-2}} = 2^{-(\frac{n}{2})-1}$  e somamos os valores, nos pontos médios

$$X^{(n)}\left(\frac{1}{2^n+1}\right), X^{(n)}\left(\frac{3}{2^n+1}\right), \dots, X^{(n)}\left(1 - \frac{1}{2^n+1}\right).$$

Para obter os novos valores

$$X^{(n+1)}\left(\frac{1}{2^n+1}\right), X^{(n+1)}\left(\frac{3}{2^n+1}\right), \dots, X^{(n+1)}\left(1 - \frac{1}{2^n+1}\right).$$

Agora queremos saber a convergência das interpolações lineares que nós construímos.

Assim, afirmamos que:

*com probabilidade um, a sequência de funções  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots$ , converge uniformemente no intervalo  $[0, 1]$ , para uma função contínua*

A importância da uniformidade da convergência decorre do seguinte fato da análise: *O limite de uma sequência uniformemente convergente de funções contínuas é uma função contínua.*

Vamos demonstrar nossa afirmação inicial. Para isto, seja  $M_n$  o valor máximo da diferença entre  $X^{(n+1)}$  e  $X^{(n)}$ , o seja

$$M_n = \max_{t \in [0,1]} |X^{(n+1)}(t) - X^{(n)}(t)|$$

Note que se  $\sum_n M_n$  é finita,  $\sum_n M_n < \infty$ , então a sequência de funções  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots$  converge uniformemente em  $[0, 1]$ . Assim, é suficiente mostrar que

$$\mathbb{P}\left[\sum_n M_n < \infty\right] = 1.$$

Observa-se que

$$M_n = 2^{-(\frac{n}{2})-1} \max \{|Z_{2^n+1}|, |Z_{2^n+2}|, \dots, |Z_{2^{n+1}}|\}. \quad (3.3)$$

Ou seja, temos que

$$\max_{t \in [0,1]} |X^{(n+1)}(t) - X^{(n)}(t)| = 2^{-(\frac{n}{2})-1} \max \{|Z_{2^n+1}|, |Z_{2^n+2}|, \dots, |Z_{2^{n+1}}|\}.$$

Justifiquemos esta igualdade. Note que

$$X^{(n+1)}\left(\frac{k}{2^n+1}\right) = X^{(n)}\left(\frac{k}{2^n+1}\right) + 2^{-(\frac{n}{2})-1} Z_{2^n+1}.$$

O que implica

$$X^{(n+1)}\left(\frac{k}{2^n+1}\right) - X^{(n)}\left(\frac{k}{2^n+1}\right) = 2^{-(\frac{n}{2})-1} Z_{2^n+1}.$$

Assim

$$\left| X^{(n+1)}\left(\frac{k}{2^n+1}\right) - X^{(n)}\left(\frac{k}{2^n+1}\right) \right| = \left| 2^{-(\frac{n}{2})-1} Z_{2^n+1} \right|.$$

Ou seja,

$$\left| X^{(n+1)}\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) - X^{(n)}\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| = 2^{-(\frac{n}{2})-1} |Z_{2^{n+1}}|.$$

E tomando o max para cada um dos termos, obtemos a expressão (3.3). Usando a Proposição (3.2.1), enunciada e provada abaixo, podemos escolher  $c > 2$  para obter que

$$M_n \leq 2^{-(\frac{n}{2})-1} \sqrt{2 \log(2^{n+1})}$$

vale para todo  $n$  suficientemente grande com probabilidade 1.

Como  $\sum 2^{-(\frac{n}{2})-1} \sqrt{n+1} < \infty$  temos que  $\sum M_n < \infty$  com probabilidade um, o que finaliza a demonstração da nossa afirmação inicial.

**Proposição 3.2.1.** *Sejam  $N_1, N_2, \dots$  v.a normais com média zero e variância 1 i.i.d. e seja  $c$  um número maior que 2. Então*

$$\mathbb{P}[|N_n| \leq \sqrt{c \log n} \text{ para todo } n \text{ suficientemente grande}] = 1$$

*Demonstração.* Para provar esta Proposição vamos a usar o Lema (2.1.1), ou seja, para  $N$  uma v.a. normal com  $x > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|N_n| > \sqrt{c \log n}] \leq 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}c \log n}}{\sqrt{c \log n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-\frac{1}{2}c}}{\sqrt{c \log n}}.$$

Que é finita para  $c > 2$ . Usando o Lema de Borel-Cantelli, Teorema (2.5.1), temos que

$$\mathbb{P}[|N_n| > \sqrt{c \log n} \text{ infinitas vezes}] = 0.$$

Que é equivalente à nossa Proposição (3.2.1), ou seja o resultado desejado.  $\square$

Então, nós sabemos que, com probabilidade 1, nossa sequência de funções contínuas tem um limite, ou seja, converge para uma função contínua

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X^{(n)} = X.$$

Temos assim estabelecido a existência de um processo limite  $X$ , e o processo  $X$  tem trajetórias contínuas  $X(0) = 0$ . Resta verificar se  $X$  satisfaz as demais propriedades do MB, definição (3.2.1), ou seja,  $X(t) \sim \mathbf{N}(0, t)$  e o processo  $X$  tem incrementos independentes estacionários.

1. Mostremos que  $X(t) \sim \mathbf{N}(0, t)$ , primeiro note que, para qualquer ponto racional diádico  $r$  é da forma  $r = \frac{k}{2^m}$ , com  $k, m \in \mathbb{Z}$ , já sabemos que  $X(r) \sim \mathbf{N}(0, r)$ , pois,  $\forall n \geq m$ , nós temos  $X^{(n)}(\frac{k}{2^m}) = X^{(m)}(\frac{k}{2^m})$ , pela forma como foi feita a construção, cada vez que selecionamos um ponto racional diádico  $r = \frac{k}{2^m}$  ele não muda nunca mais, assim  $X(r) = X^{(m)}(r)$ . Mas o processo  $X^{(m)}$  foi construído de forma tal que

$X^{(m)}(\frac{k}{2^m}) \sim \mathbf{N}(0, \frac{k}{2^m})$ . Agora seja  $t$  um número arbitrário no intervalo  $[0, 1]$  escolha uma sequência de números *racionais diádicos*  $r_1, r_2, \dots$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = t$ . Então  $X(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} X(r_n)$  com probabilidade 1, pela continuidade do processo de  $X$ . Assim, temos que  $X(r_n) \sim \mathbf{N}(0, r_n)$  e como  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = t$ , Portanto  $X(t) \sim \mathbf{N}(0, t)$ .

2. Verificar que  $X$  tem incrementos estacionários independentes pode ser feito exatamente com a mesma ideia. Por exemplo, mostrar que  $X(u) - X(t) \sim \mathbf{N}(0, u - t)$  e  $X(t) - X(s) \sim \mathbf{N}(0, t - s)$  e que  $X(u) - X(t)$  é independente de  $X(t) - X(s)$  para  $s < t < u$ . Tome três sequências de pontos *racionais diádicos*,  $s_n \rightarrow s$ ,  $t_n \rightarrow t$  e  $u_n \rightarrow u$ . Sabemos por construção que

$$X(u_n) - X(t_n) \sim \mathbf{N}(0, u_n - t_n)$$

é independente de

$$X(t_n) - X(s_n) \sim \mathbf{N}(0, t_n - s_n) \quad \text{para todo } n$$

Assim

$$[X(t_n) - X(s_n), X(u_n) - X(t_n)] \sim (\sqrt{t_n - s_n}Z_1, \sqrt{u_n - t_n}Z_2).$$

Com v.a. i.i.d  $Z_1, Z_2 \sim \mathbf{N}(0, 1)$  e finalmente tomando o limite em ambos lados e usando a continuidade de  $X$  temos que  $X$  tem incrementos estacionários independentes.

Em resumo conseguimos construir um processo que tem todas as características do movimento browniano.

### 3.2.2 Passeios aleatórios

Nesta subseção, apresentamos uma maneira conveniente e intuitiva de entender o movimento browniano, via limite de passeios aleatórios de forma discreta com passos cada vez menores que ocorrem cada vez mais frequentes. Iniciemos de modo informal para termos a ideia de passeio aleatório. Seja  $X_n = \{X_n : n = 0, 1, \dots\}$  um processo estocástico em tempo discreto que evolui como é mostrado na figura 8. Ou seja, começando no estado  $X_0 = 0$ , a próxima vez que o processo vai evoluir, obtemos  $X_1$  que pode ser para o estado  $+1$  com probabilidade  $p$  ou para o estado  $-1$  com probabilidade  $q$ , onde  $p + q = 1$ , a ideia é ter uma evolução simétrica, ou seja, tomemos  $p = q = \frac{1}{2}$ . A mesma regra é usada para etapa seguinte, de um modo geral, obtendo na  $n$ -ésima etapa  $X_n$  de valor  $k \in \{-n, -n+1, \dots, 0, 1, 2, \dots, n\}$ . Note que para  $k > 0$  devemos ter  $k+i$  realizações  $+1$  e  $i$  realizações  $-1$ , assim devemos ter  $k+i+i = k+2i = n$ . Observe que nada impede que podamos evoluir  $+m$  com probabilidade  $p$  ou  $-r$  com probabilidade  $q$ , com  $m \neq r$ , o que seria uma trajetória de um processo não simples e não simétrico. Este processo muda

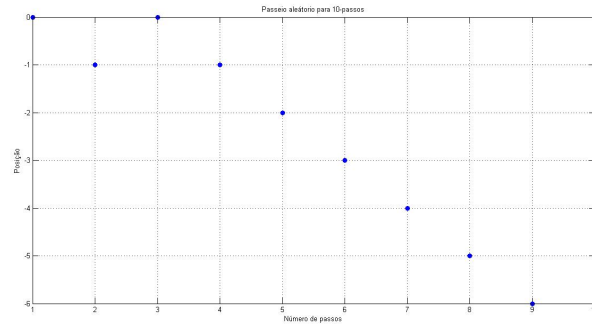


Figura 8 – Passeio Aleatório discreto com 10 passos, simétrico +1-1 e probabilidade  $\frac{1}{2}$

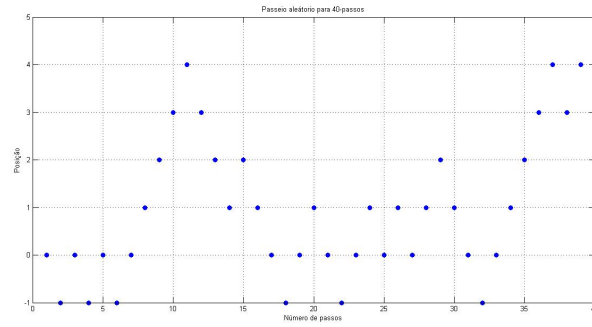


Figura 9 – Malha de decisão com probabilidade  $p$  e  $q$

de um estado para outro de acordo com a figura 9.

A transição de  $X_{n-1}$  para  $X_n$  pode ser escrita do seguinte modo

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i] = \begin{cases} p & \text{se } j = i + 1 \\ q & \text{se } j = i - 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que estas probabilidades não dependem de  $n$ . É intuitivo que o processo cumpre que a condição que, o estado futuro do processo  $X_{n+1}$  depende apenas do estado presente  $X_n$  e não dos estados previamente visitados. Posteriormente é o que chamaremos de propriedade de Markov. Uma possível trajetória deste processo simples e simétrica com 40 passos é mostrada na figura 10 e de um processo não simples e não simétrico é mostrado na figura 11.

De modo mais formal, apresentamos a definição de passeio aleatório.

**Definição 3.2.3.** *Sejam  $\xi_1, \xi_2, \dots$  uma sequência infinita de v.a. independentes e identicamente distribuídos (i.i.d). A sequência  $(S_n)_{n=0,1,2,\dots}$  das somas*

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n \quad n = 1, 2, \dots$$

*é denominada passeio aleatório.*



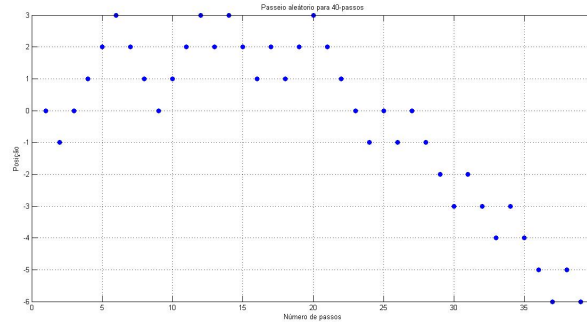


Figura 10 – Trajetória discreta simples e simétrica com 40 passos

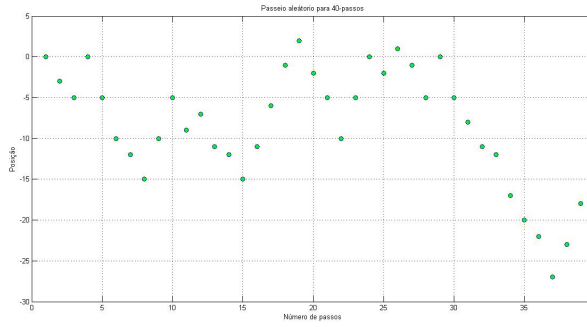


Figura 11 – Trajetória discreta não simples e não simétrica com 40 passos

De modo equivalente, um processo estocástico  $(X_n)_{n \geq 1}$  e um passeio aleatório se seus incrementos  $X_{n+1} - X_n$  são v.a.i.i.d. De fato, suponha que  $S_0 = 0$  podemos reescrever  $X_n$ , para  $n \geq 1$ , da seguinte forma

$$X_n := X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$$

Onde  $\xi_n = X_{n+1} - X_n$ . Podemos fazer duas perguntas naturais, dado um  $n \in \mathbb{Z}$  fixo, qual é o valor esperado,  $\mathbb{E}[X_n]$  do estado em  $n$  passos? e sua variância,  $V[X_n]$ ? Temos para  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\xi_i] = n\mathbb{E}[\xi_1] \\ &= n(p - q). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Em particular, no caso em que  $\mathbb{P}[S_j = 1] = p$  e  $\mathbb{P}[S_j = -1] = q = 1 - p$  obtemos que

$$\mathbb{E}[X_n] = n(p - q). \quad (3.5)$$

E também

$$\begin{aligned} V[X_n] &= \sum_{i=1}^n V[\xi_i] = nV[\xi_1] \\ &= 4npq. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Visto que  $\mathbb{E}[\xi^2] = p + q = 1$  temos que  $\mathbb{E}[\xi^2] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = V[\xi] = 1 - (p - q)^2 = 4pq$ . Mais ainda, pelas expressões (3.5) e (3.6), tomando  $p = q$  obtemos o valor esperado é zero, ou seja,  $X_n$  permanece de forma inicial depois de  $n$  passos em média, mas a variabilidade de  $X_n$  é o número de passos  $n$ , isto é,

$$\mathbb{E}[X_n] = 0 \quad e \quad V[X_n] = n.$$

Se  $p > q$ , ou seja, o passeio aleatório pega passos para acima,  $+1$  com maior probabilidade, então o estado médio depois de  $n$  passos é um número positivo, isto é, seu comportamento médio é avançar para acima.

Similarmente, se  $p < q$ , então o estado médio final da caminhada após  $n$  passos é um número negativo, isto é, a caminhada em média tende a se mover para baixo. Em qualquer caso, a variância cresce à medida que o número  $n$  de passos aumenta e assume seu máximo quando  $p = q = \frac{1}{2}$ , isto tá indicando que quanto maior o número de passos dado, maior a incerteza sobre a posição final do processo. Na figura 12 temos um passeio aleatório simples e simétrico com 100 passos. Poderíamos ainda ter simultaneamente M

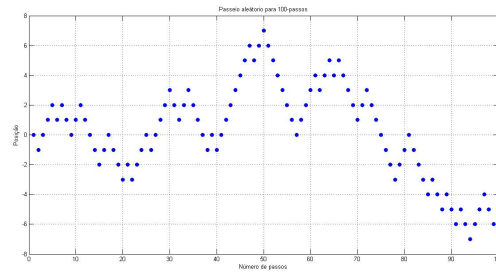


Figura 12 – Passeio aleatório discreto simples e simétrico com 100 passos

jogos, ou seja, M possíveis trajetórias do passeio aleatório, podemos perguntar pelo jogo médio. Na figura 13 temos 3 passeios aleatórios cada um com 10 passos, e com passeio médio. Dado um número de passos  $n \geq 0$ , qual é a probabilidade que o estado  $X_n$  esteja

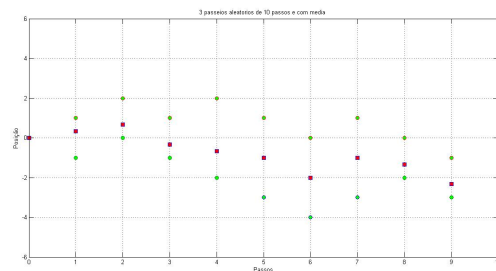


Figura 13 – Três passeios aleatórios discretos com 10 passos, e com passeio médio

acima ou abaixo?, isto é,  $X_n > 0$  ou  $X_n < 0$ .

Seja  $k \geq 0$  o número de passos na direção positiva e  $n - k \geq 0$  o número de passos na direção negativa então,

$$\mathbb{P}[X_n = 2k - n] = \binom{n}{k} p^k (q)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (3.7)$$

Onde  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$  representa o número de combinações de  $n$  tomando  $k$ . A expressão (3.7) é para calcular a probabilidade de uma v.a. binomial. Se consideramos um passeio aleatório simples e simétrico com  $p = q = \frac{1}{2}$ . A expressão (3.7) resulta em

$$\mathbb{P}[X_n = 2k - n] = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

No final gostaríamos de saber que passará com nosso jogo, depois de dar um número suficientemente grande de passos, isto é, Se  $n \rightarrow \infty$ , que acontece com  $X_n$ , ou seja, como vai ser o comportamento assintótico de nosso jogo.

A partir desta análise de forma intuitiva e usando o TLC (2.6.3) sobre uma sequência de v.a. binomiais, estamos prontos para construir o MB como limite de passeios aleatórios discretos simples e simétricos. denote por  $X_t^n$  o estado ou posição no instante  $t = n\Delta t$  e novamente, suponha  $X_0 = 0$  e que nosso estado pode mudar para cima ou para baixo no tempo  $t = n\Delta t$  uma quantidade  $\Delta x > 0$  com probabilidade  $\frac{1}{2}$ .

Seja  $\xi_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , uma sequência de v.a. independentes com

$$\mathbb{P}[\xi_k = 1] = \mathbb{P}[\xi_k = -1] = \frac{1}{2} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots.$$

Sabemos que  $\mathbb{E}[\xi_k] = 0$  e  $V[\xi_k] = 1$ . Defina  $S_n$  como a soma dos  $\xi_k$ , ou seja, como  $S_n := \sum_{k=1}^n \xi_k$ , e observe que nosso estado  $X_t$  é dado por  $X_t = S_n \Delta x$  assumindo, que a relação espacial e temporal é uma unidade, ou seja  $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = 1$ , temos  $(\Delta x)^2 = \Delta t$ ; esta relação deve ser escolhida com muito cuidado, ver [(ROSENTHAL, 2000) seção 15.4 pag. 187], assim temos então

$$X_t = S_n \Delta x = \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \sqrt{n} \Delta x = \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \sqrt{n \Delta t} = \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \sqrt{t}.$$

Assim, usando o TCL, Teorema (2.6.3), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty; t=n\Delta t} \mathbb{P}[a < X_t^n < b] &= \lim_{n \rightarrow \infty; t=n\Delta t} \mathbb{P}\left[\frac{a}{\sqrt{t}} \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{b}{\sqrt{t}}\right] \\ &\stackrel{TCL}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\frac{b}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{fazendo } x = \frac{u}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(\frac{u}{\sqrt{t}})^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2t}} du. \end{aligned}$$

Então  $X_t^n$  converge em distribuição para  $X_t$  que tem distribuição *normal*,  $X_t \sim N(0, t)$  e usando novamente o TLC, Teorema (2.6.3), temos que  $X_t^n - X_s^n$  com  $0 < s < t$  converge em distribuição para  $X_{t-s}$  que tem distribuição *normal*,  $X_t \sim N(0, t - s)$ . Como nosso passeio aleatório discreto é simples e simétrico, pode-se ainda argumentar que, uma vez que os tamanhos dos saltos individuais em  $X_t^n$  tendem para zero quando  $n \rightarrow \infty$  o processo limite, por dizer,  $B_t$ , será contínuo, como função do tempo  $t$ . A ideia é que, se fizermos um único passo de tempo discreto de tamanho  $\Delta t \simeq \frac{1}{n}$  então vamos dar um salto de  $|\Delta X^n| \simeq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$  quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , e assim teremos que os caminhos serão contínuos, ou seja, podemos garantir sua continuidade com Critério de continuidade de Kolmogorov-Centsov (ver [(KARATZAS; SHREVE, 1991) Cap 2 seção 2.2 pag 53-55]), e podemos garantir a existência do MB, com o Teorema de extensão de Kolmogorov (ver [(KARATZAS; SHREVE, 1991) Cap 2 seção 2.2 pag 50-51]).

Portanto, nosso jogo de passeio aleatório discreto simples e simétrico, tem um comportamento *normal* quando o tempo é muito grande. Portanto podemos dizer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_t^n$  converge para um processo, por dizer  $B_t$ , que possui propriedades de MB, ou seja

1.  $X_0 = 0$
2. Se  $0 \leq s \leq t$  então  $X_t - X_s \sim N(0, t - s)$ .
3. Se  $0 \leq r \leq s < t$  então  $X_t - X_s$  e  $X_r$  são independentes.
4. Os caminhos  $t \rightarrow X_t$  são contínuos.

Os detalhes da verificação que  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_t^n$  converge para um MB,  $B_t$ , pode ser obtida em [(KARATZAS; SHREVE, 1991) Cap. 2. seção 2.4].

Em resumo, com uma ideia intuitiva como o passeio aleatório discreto e ajuda do TCL, Teorema (2.6.3), conseguimos construir um processo estocástico com as propriedades (1)-(4), da definição (3.2.1). Na figura 14 temos 3 passeios aleatórios cada um com 100 passos, e com passeio médio, só com 100 passos podemos ter uma intuição de possíveis trajetórias do MB. Na figura 15 podemos ver que acontece se o número de passos é grande,

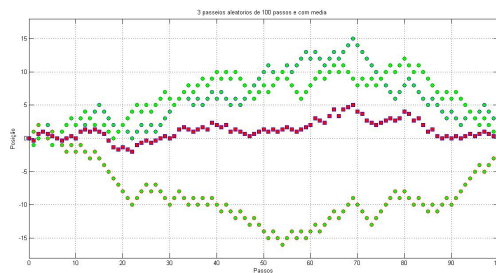


Figura 14 – Três passeios aleatórios discretos com 100 passos, e com passeio médio

para um passeio aleatório, por exemplo 1000 passos.

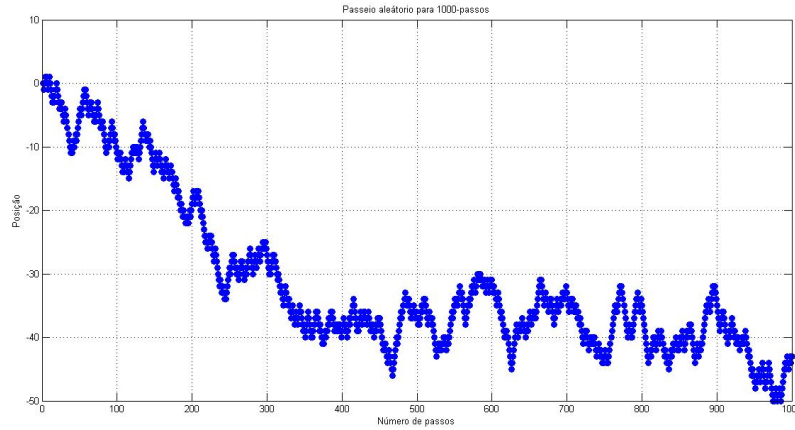


Figura 15 – Passeio aleatório discreto com 1000 passos

Existe outra forma de construção do MB que é usando uma interpolação linear de passeios aleatórios não simples e não simétrica, que é chamada o princípio da invariância de Donsker. A ideia geral é considerar agora uma sequência  $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$  de v.a.i.i.d. com média zero e variância  $\sigma^2$ ,  $0 < \sigma^2 < \infty$  assim como a sequência de somas parciais  $X_0 = 0$  e  $X_k = \sum_{j=1}^k \xi_j$ , com  $k \geq 1$ . O processo de tempo contínuo  $Y = \{Y_t; t \geq 0\}$  pode ser obtido a partir da sequência  $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ , por uma interpolação linear, ou seja,

$$Y_t = X_{[t]} + (t - [t]) \xi_{[t]+1} \quad t \geq 0$$

Onde  $[t]$  indica o maior inteiro inferior ou igual a  $t$ . Escalando de forma adequada tanto tempo e espaço, obtemos a partir de  $Y$  uma sequência de processos  $\{X^n\}$ :

$$X_t^n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} Y_{nt} \quad t \geq 0$$

Na figura 16 temos uma típica interpolação linear de passeios aleatórios não simples e não simétrica com 15 passos.

E o objetivo é mostrar que sequência de processos,  $\{X^n; t \geq 0\}$ , converge para um movimento browniano,  $B_t$ . Para saber mais sobre a construção e o princípio da invariância de Donsker podem ser consultados [(KARATZAS; SHREVE, 1991) Capítulo 2. seção 2.4], [(BILLINGSLEY, 2012) Capítulo 3. seção aplicações]. Na figura 17 podemos ver que acontece se o número de passos é grande, para uma interpolação linear de passeios aleatórios não simples e não simétrica, por exemplo 1000 passos.

Nos concluímos esta seção relacionando o movimento browniano com processo gaussianos. Esta análise será útil na validação de algumas propriedades das trajetórias do MB, conteúdo da próxima seção.

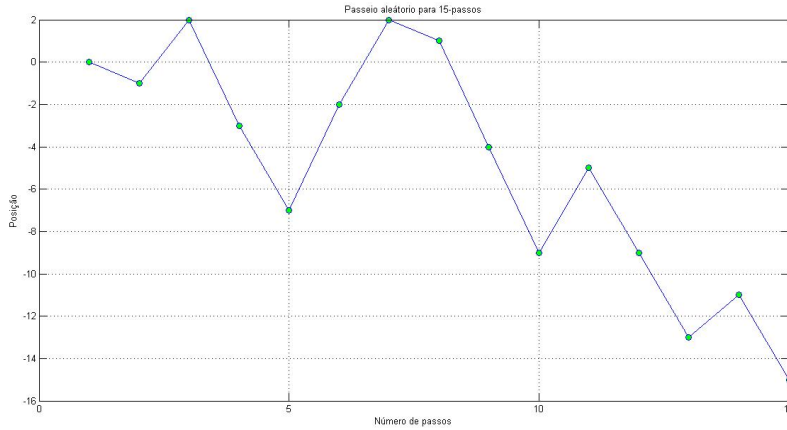


Figura 16 – Passeios aleatórios não simples e não simétrica com 15 passos

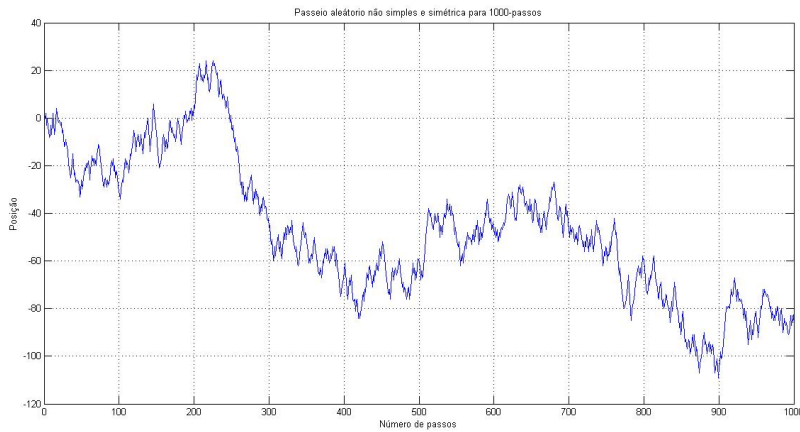


Figura 17 – interpolação linear de passeios aleatórios não simples e não simétrica com 1000 passos

### 3.2.3 Movimento browniano é um processo gaussiano

Nesta seção nosso principal objetivo é demonstrar que o MB é um processo gaussiano, mas antes vamos calcular sua função característica, para finalmente demonstrar que o MB é um processo Gaussiano.

Tendo conhecimento sobre a função de densidade de probabilidade de MB, expressão (3.2), podemos calcular a função característica do MB

**Teorema 3.2.1.** *[Função característica do movimento browniano (MB)]*

Seja  $B_t$  um MB então a função característica é

$$\Phi_{B_t}(z) = e^{-\frac{z^2 t}{2}} \quad z \in \mathbb{R}$$

*Demonstração.* Será feita seguindo [(JAMES, 2004) Cap 6 seção 6.1].

Sabemos que  $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ , ou seja média  $\mu = 0$  e variância  $\sigma^2 = t$ , e que a função de

densidade é

$$f_{B_t}(x) = \frac{e^{-\frac{(x-0)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}.$$

Devemos calcular  $\Phi_{B_t}(z)$ , seja  $B_t = X_t$ , para facilitar as contas, então

$$\begin{aligned}\Phi_{X_t}(z) &= \mathbb{E}(e^{izX_t}) = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} f_{X_t}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} \frac{e^{-\frac{(x)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{izx - \frac{(x)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\frac{2izxt - (x)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dx.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Na última expressão (3.8) completamos quadrados, com o termo  $(2izxt - (x)^2)$  da seguinte forma

$$\begin{aligned}2izxt - (x)^2 &= -((x)^2 - 2izxt + (izt)^2 - (izt)^2) = -[(x - (izt))^2 - (izt)^2] \\ &= [(izt)^2 - (x - (izt))^2].\end{aligned}\quad (3.9)$$

Voltando a última expressão (3.8) e substituindo por (3.9) temos que

$$\begin{aligned}\Phi_{X_t}(z) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\frac{2izxt - (x)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{[(izt)^2 - (x - (izt))^2]}{2t}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{(izt)^2}{2t}} e^{-\frac{(x - (izt))^2}{2t}} dx \\ &= e^{-\frac{(z^2 t)}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x - (izt))^2}{2t}} dx \\ &= e^{-\frac{(z^2 t)}{2}}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

A integral da expressão (3.10) já foi calculada no exemplo de distribuição normal e seu valor é 1, ver capítulo 2. Assim  $\Phi_{X_t}(z) = e^{-\frac{(z^2 t)}{2}}$

o que termina a demonstração.  $\square$

**Teorema 3.2.2.** *Seja  $B_t$  um MB. Seja  $Y_t = \gamma t + \sigma B_t$  com  $\gamma, t \in \mathbb{R}$  e  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  então a função característica é*

$$\Phi_{Y_t}(z) = e^{iz\gamma t - \frac{z^2 \sigma^2 t}{2}}$$

*Demonstração.* Continuamos com a mesma notação como no Teorema (3.2.1), ou seja,  $B_t = X_t$  e usando o Teorema (3.2.1) temos que a função característica de  $Y_t$  é

$$\begin{aligned}\Phi_{Y_t}(z) &= \mathbb{E}[e^{izY_t}] = \mathbb{E}[e^{iz(\gamma t + \sigma B_t)}] = \mathbb{E}[e^{iz(\gamma t + \sigma X_t)}] = \mathbb{E}[e^{iz\gamma t} e^{iz\sigma X_t}] = e^{iz\gamma t} \mathbb{E}[e^{iz\sigma X_t}] \\ &= e^{iz\gamma t} \phi_{X_t}(z\sigma) = e^{iz\gamma t} e^{-\frac{z^2 \sigma^2 t}{2}} = e^{iz\gamma t - \frac{z^2 \sigma^2 t}{2}}.\end{aligned}$$

O que termina a prova do Teorema.  $\square$

Note que podemos calcular os momentos de todas as ordens. Para isto recordemos a definição e algumas propriedades da função gamma.

A função gamma é definida como

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Vamos mostrar que

$$\int_0^\infty \rho^m e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho = 2^{\frac{(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) \quad \text{para } m > -1. \quad (3.12)$$

De fato, substituindo  $x = \frac{1}{2}\rho^2$  e  $dx = \rho d\rho$  na integral para a função gamma para obter (para  $t > 0$ )

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &:= \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \left(\frac{1}{2}\rho^2\right)^{t-1} \rho d\rho \\ &= \frac{1}{2^{t-1}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho^{2t-1} d\rho. \end{aligned}$$

Agora, se  $m = 2t - 1 \Rightarrow t = \frac{m+1}{2}$  e assim

$$2^{t-1} = 2^{\frac{m+1}{2}-1} = 2^{\frac{m-1}{2}}.$$

Portanto, substituindo  $t = \frac{m+1}{2}$  e  $2^{t-1} = 2^{\frac{m-1}{2}}$  na expressão (3.11) conseguimos o resultado desejado, ou seja, conseguimos a expressão (3.12).

Retornando a questão de determinar os momentos de ordem arbitrária do MB, consideremos  $B_t$  um MB definido em  $\mathbb{R}$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots$  temos para expoente ímpar que

$$\mathbb{E}[B_t^{2k+1}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} x^{2k+1} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = 0.$$

E para expoente par,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t^{2k}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \stackrel{s=\sqrt{2ty}}{=} \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty (2ty)^{2k} e^{-y} \frac{2tdy}{2\sqrt{2ty}} \\ &= \frac{2^k t^k}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (y)^{k-\frac{1}{2}} e^{-y} dy = t^k \frac{2^k \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Em particular, temos que  $\mathbb{E}[B_t] = \mathbb{E}[B_t^3] = 0$ ,  $V[B_t] = V[B_t^2] = t$  e  $\mathbb{E}[B_t^4] = 3t^2$ .

Um resultado que nos será útil é o seguinte Lema.

**Lema 3.2.2.** *[(KARATZAS; SHREVE, 1991) problema 2.10] Se  $B_t - B_s$ ,  $0 \leq s < t$  é normalmente distribuído com média zero e variância  $t-s$ , então para cada inteiro positivo  $n$ , existe uma constante positiva  $C_n$  para o qual*

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^{2n}] = C_n |t - s|^n.$$

*Demonstração.* Seja  $h = t - s$ , temos que

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^{2n}] = \int_{-\infty}^\infty |x|^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{h}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi h}} \int_0^\infty x^{2n} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{h}} dx.$$



Usando a expressão (3.12) com  $\rho = xh^{-\frac{1}{2}}$  temos que

$$\begin{aligned} 2^{\frac{(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) &= \int_0^\infty \rho^m e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho = \int_0^\infty (xh^{-\frac{1}{2}})^m e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{h}} h^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_0^\infty x^m h^{-\frac{m+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{h}} dx = h^{-\frac{m+1}{2}} \int_0^\infty x^m e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{h}} dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^\infty x^m e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{h}} dx = 2^{\frac{(m-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) h^{\frac{m+1}{2}}.$$

E assim

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|B_t - B_s|^{2n}] &= \frac{2}{\sqrt{2\pi h}} \int_0^\infty x^{2n} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{h}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{(2n-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) h^n \\ &= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) h^n. \end{aligned}$$

Tomando  $C_n = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$  temos a prova do Lema.  $\square$

Como consequência para  $n = 2$  temos

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^{2.2}] = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right) h^2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) h^2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} h^2 = 3(t-s)^2.$$

Agora definamos processo gaussiano para poder finalmente provar que o MB é um processo gaussiano.

**Definição 3.2.4.** Dizemos que um processo estocástico real  $(X_t)_{t>0}$  é gaussiano se a v.a.  $Y = c_1 X_{t_1} + \dots + c_n X_{t_n}$  é gaussiana, para qualquer escolha de  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_1, \dots, t_n$  positivos e  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ .

O processo gaussiano  $(X_t)_{t>0}$  é dito centrado se  $\mathbb{E}[X_t] = 0$ , para todo  $t > 0$ .

**Teorema 3.2.3.** O movimento browniano  $B_t$  é um processo gaussiano. Mais especificamente, para quaisquer  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ , o vetor  $\Gamma := (B_{t_1}, \dots, B_{t_n})^\top$  é uma v.a. gaussiana com matriz de covariância simétrica definida semi positiva  $C = \min(t_j, t_k) = (t_j \wedge t_k)_{j,k=1,\dots,n}$  tal que

$$\mathbb{E}[e^{i(\xi, \Gamma)}] = e^{-\frac{1}{2}(\xi, C\xi)}. \quad (3.13)$$

Onde  $(\xi, \Gamma)$  denota o produto interno euclidiano em  $\mathbb{R}^n$ .

*Demonstração.* Seja  $t_0 = 0$  e  $\Delta := (B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})^\top$  e observe que podemos escrever  $B_{t_k} - B_{t_0} = \sum_{j=1}^k (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$ . Assim temos que

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{t_1} - B_{t_0} \\ B_{t_2} - B_{t_1} \\ \vdots \\ B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \end{pmatrix} = M\Delta.$$

Onde  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz diagonal inferior só com 1, também sabemos que  $M^{-1}M = I_n$  com

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$\begin{aligned} (\xi, \Gamma) &= (\xi, M\Delta) = (M^\top \xi, \Delta) = (M^{-1}\xi, \Delta) = \\ &= \xi_1(B_{t_1} - B_{t_0}) + \xi_2(B_{t_2} - B_{t_1}) + \cdots + \xi_n(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}). \end{aligned}$$

Com isso em mente, substituindo em (3.13) e usando o fato que as v.a.  $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$  são independentes e usando o Teorema (3.2.1) temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{i(\xi, \Gamma)}] &= \mathbb{E}[e^{i(\xi, M\Delta)}] = \mathbb{E}[e^{i(M^{-1}\xi, \Delta)}] = \mathbb{E}[e^{i(\xi_1(B_{t_1} - B_{t_0}) + \xi_2(B_{t_2} - B_{t_1}) + \cdots + \xi_n(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}))}] \\ &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[e^{i(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})(\xi_j + \cdots + \xi_n)}] = \prod_{j=1}^n e^{-\frac{1}{2}(t_j - t_{j-1})(\xi_j + \cdots + \xi_n)^2} \\ &= e^{-\frac{1}{2} \left[ \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})(\xi_j + \cdots + \xi_n)^2 \right]} = e^{-\frac{1}{2} \left[ \sum_{j=1}^n t_j (\xi_j + \cdots + \xi_n)^2 - \sum_{j=1}^n t_{j-1} (\xi_j + \cdots + \xi_n)^2 \right]} \\ &= e^{-\frac{1}{2} (t_n \xi_n^2 + \sum_{j=1}^{n-1} t_j (\xi_j + \cdots + \xi_n)^2) - (\xi_{j+1} + \cdots + \xi_n)^2} = e^{-\frac{1}{2} (t_n \xi_n^2 + \sum_{j=1}^{n-1} t_j \xi_j (\xi_j + 2\xi_{j+1} + \cdots + 2\xi_n)^2)} \\ &= e^{-\frac{1}{2} (\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (t_j \wedge t_k) \xi_j \xi_k)} = e^{-\frac{1}{2} (\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C \xi_j \xi_k)} = e^{-\frac{1}{2} (\xi, C\xi)}. \end{aligned}$$

Note que  $C$  é simétrica

$$C = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix}.$$

Sabemos pela definição da covariância que  $C = \mathbb{E}[(\Gamma - \mathbb{E}[\Gamma])(\Gamma - \mathbb{E}[\Gamma])^\top] = \mathbb{E}[(\Gamma)(\Gamma)^\top]$ , assim para  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\Gamma)^\top \mathbf{a}]^2 &= \mathbb{E}[(\Gamma)^\top \mathbf{a}]^\top (\Gamma)^\top \mathbf{a}] \geq 0 \\ &= \mathbb{E}[(\mathbf{a}^\top (\Gamma))((\Gamma)^\top \mathbf{a})] \geq 0 \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \\ &= (\mathbf{a}^\top C \mathbf{a}) \geq 0 \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Logo  $C$  é semi definida positiva, outra forma de confirmar seria, que se  $(\xi_1 + \cdots + \xi_n) \neq (0, \cdots, 0)$  e  $t_0 = 0$  temos que

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (t_j \wedge t_k) \xi_j \xi_k = \sum_{j=1}^n \underbrace{(t_j - t_{j-1})}_{>0} (\xi_j + \cdots + \xi_n)^2 \geq 0.$$

Assim só é igual a zero se, e somente se,  $(\xi_j + \dots + \xi_n)^2 = 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$  o que implica que  $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$ , logo temos que  $C$  é estritamente positiva. Finalmente temos que  $\mathbb{E}[e^{i(\xi, \Gamma)}] = e^{-\frac{1}{2}(\xi, C\xi)}$  que é exatamente a expressão da função característica para uma v.a. gaussiana, logo o MB,  $B_t$  é um processo gaussiano.  $\square$

É importante saber que existe uma recíproca, que poderia ser uma outra forma de definir o MB, ou seja.

**Proposição 3.2.2.** *Seja  $X_t$  um processo gaussiano, contínuo, com média zero, e com covariância,  $Cov[X_t, X_s] = \min(t, s)$ . Então,  $X_t$  é um MB.*

*Demonstração.* Devemos verificar as quatro condições da definição do MB, definição (3.2.1). O item 1 é imediato. Verifiquemos o item 4, ou seja, verifiquemos que  $X_t - X_s \sim \mathbf{N}(0, t - s)$ . Fixemos  $0 \leq s \leq t$ . Sabemos que  $X_t - X_s$  é v.a. gaussiana, com média dada por  $\mathbb{E}[X_t - X_s] = 0$  e usando a Proposição (2.4.1) temos variância dada por

$$V[(X_t - X_s)] = V[X_t] + V[X_s] - 2Cov[X_t, X_s] = t + s - 2s = t - s.$$

Portanto, temos que  $X_t - X_s \sim \mathbf{N}(0, t - s)$ . isto conclui a verificação do item 4. Verifiquemos o item 2, ou seja, dado  $s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2$  e  $C = Cov$ , temos que

$$\begin{aligned} C[(X_{t_1} - X_{s_1}), (X_{t_2} - X_{s_2})] &= C[X_{t_1}, X_{t_2}] - C[X_{s_1}, X_{t_2}] - C[X_{t_1}, X_{s_2}] + C[X_{s_1}, X_{s_2}] \\ &= t_1 - s_1 - t_1 + s_1 = 0. \end{aligned}$$

Logo usando a Proposição (2.5.2) temos que as v.a.  $X_{t_2} - X_{s_2}$  e  $X_{t_1} - X_{s_1}$ , são independentes, logo  $X_t$  tem incrementos independentes. Finalmente verifiquemos o item 3, ou seja, dado  $h > 0$ , devemos mostrar que as v.a.  $X_{t+h} - X_{s+h}$  e  $X_t - X_s$  tem a mesma distribuição *normal*,  $\mathbf{N}(0, t - s)$ . Já sabemos que  $X_t - X_s \sim \mathbf{N}(0, t - s)$ . Calculemos a distribuição da v.a.  $X_{t+h} - X_{s+h}$ , sabemos que tem média zero e variância dada por

$$V[X_{t+h} - X_{s+h}] = t + h - s - h = t - s.$$

Logo a v.a.  $X_{t+h} - X_{s+h}$  tem distribuição *normal*,  $\mathbf{N}(0, t - s)$ . Portanto tem as mesmas distribuições, ou seja, o processo  $X_t$  tem incrementos independentes, assim verificamos o item 3. Logo o processo  $X_t$  é um MB.  $\square$

### 3.3 Propriedades das trajetórias do Movimento Browniano

Nesta seção vamos estudar os diferentes tipos de invariância, escala, translação que o MB possui, a inversão temporal, reflexão, também sua lei própria de grandes números. Depois o objetivo é analisar as trajetórias do MB, a propriedade de não ser monótono em qualquer intervalo, ser Höder contínuo, a função de densidade para seu max e min, sua lei do logaritmo iterado, sua não diferenciabilidade, sua auto similaridade, seu conjunto de zeros e por último sua variação infinita e variação quadrática finita.

1) **(Invariante por escala)** [(KARATZAS; SHREVE, 1991)) Cap. 2 Lema 9.4]

O MB é invariante por escala, informalmente isto significa que, se fizermos um "zoom" de aproximação ou de distanciamento no MB, continua sendo um MB. Deste modo, os caminhos do MB são, em algum sentido, fractais aleatórios, ou seja, tem uma estrutura geométrica não trivial em todas suas escalas.

Mas precisamente, seja  $B_t$  um MB e  $\alpha > 0$  constante fixada, então o processo  $W_t$  definido por:

$$W_t = \alpha B_{\frac{t}{\alpha^2}} \quad t \geq 0 \quad (3.14)$$

é um MB.

Devemos verificar as propriedades que caracteriza um MB, ou seja, verificar a definição (3.2.1). Outra forma poderia ser usando a Proposição (3.2.2).

## a) (Zero e continuidade).

Se  $t = 0$  então  $W_0 = \alpha B_0 = 0$ .

Sabemos que  $B_t$  é contínuo, logo  $\alpha B_{\frac{t}{\alpha^2}}$  é contínuo, portanto  $W_t$  é contínuo.

## b) (normal).

Uma vez que a distribuição *normal* é caracterizada por sua média e sua covariância, temos que verificar que a média e a covariância do processo  $W_t$  coincidem com as de MB,  $B_t$ , ou seja, ter uma media igual a zero e uma covariância igual a mínimo entre  $s$  e  $t$  com  $s < t$ .

Sabemos que  $\alpha B_t$  tem distribuição *normal*. Seja tal que  $0 < s < t$  a v.a.

$$W_t - W_s = \alpha \left( B_{\frac{t}{\alpha^2}} - B_{\frac{s}{\alpha^2}} \right)$$

tem distribuição *normal* com esperança

$$\mathbb{E}[W_t - W_s] = \alpha \mathbb{E} \left[ B_{\frac{t}{\alpha^2}} - B_{\frac{s}{\alpha^2}} \right] = 0$$

e com variância dada por

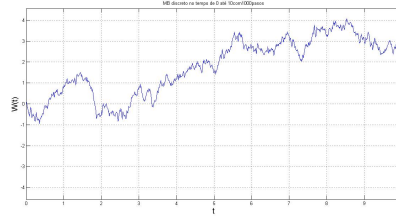
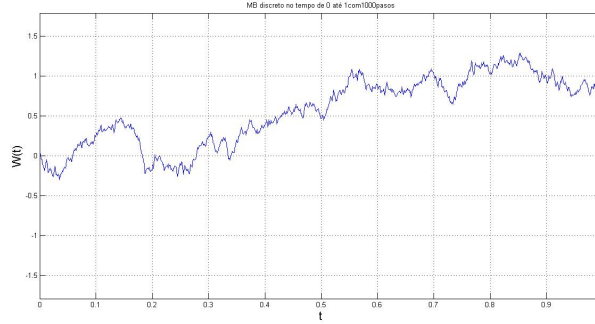
$$V[W_t - W_s] = \alpha^2 V \left[ B_{\frac{t}{\alpha^2}} - B_{\frac{s}{\alpha^2}} \right] = \alpha^2 \left( \frac{t}{\alpha^2} - \frac{s}{\alpha^2} \right) = t - s$$

Logo a v.a.  $W_t - W_s$  tem distribuição com média zero e variância  $t - s$ , isto é,  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  e com covariância

$$\begin{aligned} Cov[W_t, W_s] &= \mathbb{E}[W_t W_s] - \mathbb{E}[W_t] \mathbb{E}[W_s] = \mathbb{E} \left[ \alpha B_{\frac{t}{\alpha^2}} \alpha B_{\frac{s}{\alpha^2}} \right] - 0 * 0 \\ &= \alpha^2 \mathbb{E} \left[ B_{\frac{t}{\alpha^2}} B_{\frac{s}{\alpha^2}} \right] = \alpha^2 \min\left(\frac{t}{\alpha^2}, \frac{s}{\alpha^2}\right) = \alpha^2 \frac{s}{\alpha^2} = s. \end{aligned}$$

Logo pela Proposição (3.2.2), temos que o processo  $W_t = \alpha B_{\frac{t}{\alpha^2}}$  é um MB.

Nas figuras 18 e 19 ilustramos duas trajetórias típicas do MB nas diferentes

Figura 18 – Movimento browniano, com  $t \in [0, 10]$  com uma partição de 1000Figura 19 – Movimento browniano, com  $t \in [0, 1]$  com uma partição de 1000

escalas, onde podemos intuir uma das propriedades de auto similaridade, propriedade fractal que possui, na figura (18) temos um exemplo típico de um MB, com  $t \in [0, 10]$  com uma partição de 1000 Na figura 19 temos um exemplo de um movimento browniano,  $t \in [0, 1]$  com uma partição de 1000

2) **(Inversão do tempo).**[([KARATZAS; SHREVE, 1991](#))) Cap. 2 Lema 9.4]

Supor que  $B_t$  com  $t \geq 0$  é MB então o processo  $W_t$  definido por

$$W_t = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ tB_{\frac{1}{t}} & t > 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

é um MB.

a) (Zero e continuidade).

Usando a lei dos grandes números para o MB (esta propriedade será provada posteriormente, propriedade (7)) temos que o processo  $tB_{\frac{1}{t}}$  é contínuo em zero. Nos demais pontos a continuidade de  $W_t$  segue da continuidade de  $B_{1/t}$ .

b) (normal).

Para todo  $0 < s < t$  temos que

$$W_t - W_s = tB_{\frac{1}{t}} - sB_{\frac{1}{s}} = -s(B_{\frac{1}{s}} - B_{\frac{1}{t}}) + (t-s)B_{\frac{1}{t}}.$$

Assim a v.a.  $W_t - W_s$  é composta por uma combinação linear de duas v.a. independentes que tem distribuição *normal*, portanto  $W_t - W_s$  também tem

distribuição *normal*. Mais ainda, sua média é dada por

$$\mathbb{E}[W_t - W_s] = \mathbb{E}\left[tB_{\frac{1}{t}} - sB_{\frac{1}{s}}\right] = t\mathbb{E}\left[B_{\frac{1}{t}}\right] - s\mathbb{E}\left[B_{\frac{1}{s}}\right] = 0.$$

E variância dada por

$$\begin{aligned} V[W_t - W_s] &= V\left[-s\left(B_{\frac{1}{s}} - B_{\frac{1}{t}}\right) + (t-s)B_{\frac{1}{t}}\right] \\ &= V\left[-s\left(B_{\frac{1}{s}} - B_{\frac{1}{t}}\right)\right] + V\left[(t-s)B_{\frac{1}{t}}\right] \\ &= s^2V\left[\left(B_{\frac{1}{s}} - B_{\frac{1}{t}}\right)\right] + (t-s)^2V\left[B_{\frac{1}{t}}\right] = s^2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right) + \frac{(t-s)^2}{t} \\ &= s - \frac{s^2}{t} + t - 2s + \frac{s^2}{t} = t - s. \end{aligned}$$

Onde a segunda igualdade é justificada, pela independência de  $B_{\frac{1}{s}} - B_{\frac{1}{t}}$  e  $B_{\frac{1}{t}}$ . Se  $s = 0$  temos que  $W_t = tB_{\frac{1}{t}}$  tem distribuição *normal* com média dada por

$$\mathbb{E}[W_t] = \mathbb{E}\left[tB_{\frac{1}{t}}\right] = t\mathbb{E}\left[B_{\frac{1}{t}}\right] = 0.$$

E variância dada por

$$V[W_t] = V\left[tB_{\frac{1}{t}}\right] = t^2V\left[B_{\frac{1}{t}}\right] = t^2\frac{1}{t} = t.$$

E com covariância

$$\begin{aligned} Cov[W_t, W_s] &= \mathbb{E}[W_t W_s] - \mathbb{E}[W_t]\mathbb{E}[W_s] = \mathbb{E}[W_t W_s] - 0 * 0 = \mathbb{E}\left[tB_{\frac{1}{t}}sB_{\frac{1}{s}}\right] \\ &= ts\mathbb{E}\left[B_{\frac{1}{t}}B_{\frac{1}{s}}\right] = st\min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) = st\frac{1}{t} = s. \end{aligned}$$

Logo  $W_t$  tem distribuição *normal* com média zero e com variância  $t$ , isto é,  $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ . Logo pela Proposição (3.2.2) o processo,  $W_t = tB_{\frac{1}{t}}$  é um MB. Na figura 20 temos um MB com sua inversão do tempo.

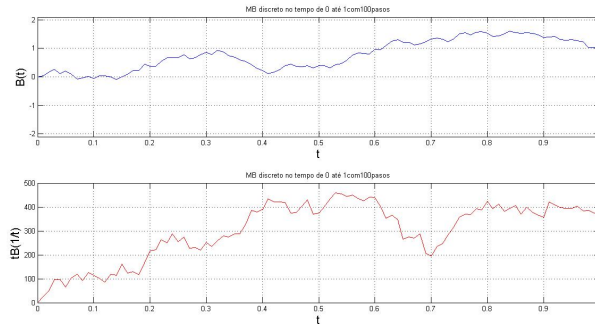


Figura 20 – Movimento browniano  $B_t$  e  $tB_{\frac{1}{t}}$  com 100 passos, com  $t \in [0, 1]$

Usando a mesma estratégia podemos verificar que a transformação por reflexão do MB também é um MB

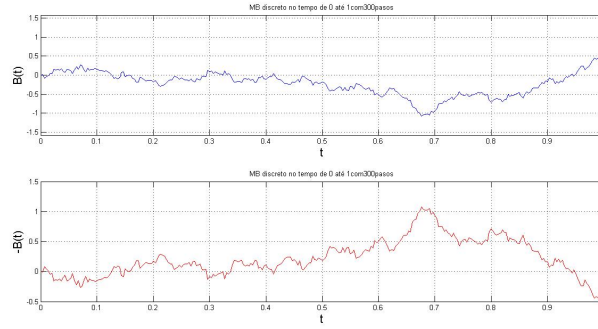


Figura 21 – Movimento browniano  $B_t$  e  $-B_t$  com 300 passos, com  $t \in [0, 1]$

3) **(Reflexão)**. [((KARATZAS; SHREVE, 1991)) Cap. 2 Lema 9.4]

Supor que  $B_t$  com  $t \geq 0$  é um MB, então o processo  $W_t = -B_t$  é um MB. Na figura 21 temos um MB com sua Reflexão.

4) **(Invariância por Translação)** depois de um tempo fixo  $t_0$ . [((KARATZAS; SHREVE, 1991)) Cap. 2 Lema 9.4]

Sejam  $t_0 > 0$  Fixo e  $B_t$  com  $t \geq 0$ , um MB. O processo  $W_t = B_{t+t_0} - B_{t_0}$  é um MB.

a) (Zero e continuidade).

Se  $t = 0$  temos que  $W_0 = B_{t_0} - B_{t_0} = 0$  e como os processos  $B_{t+t_0}$  e  $B_{t_0}$  são contínuos, logo o processo  $W_t$  é contínuo.

b) (Normal).

Para  $s < t$  temos que

$$W_t - W_s = B_{t+t_0} - B_{t_0} - [B_{s+t_0} - B_{t_0}] = B_{t+t_0} - B_{s+t_0}. \quad (3.16)$$

O processo  $W_t$  tem distribuição *normal* com média zero e variância  $t - s$ , de fato, sua esperança é

$$\mathbb{E}[W_t - W_s] = \mathbb{E}[B_{t+t_0} - B_{s+t_0}] = \mathbb{E}[B_{t+t_0}] - \mathbb{E}[B_{s+t_0}] = 0 + 0 = 0.$$

E variância dada por

$$\begin{aligned} V[W_t - W_s] &= V[B_{t+t_0} - B_{s+t_0}] = V[B_{t+t_0}] - V[B_{s+t_0}] = t + t_0 - (s + t_0) \\ &= t - s. \end{aligned}$$

E covariância dada por

$$\begin{aligned} Cov[W_t, W_s] &= \mathbb{E}[W_t W_s] = \mathbb{E}[(B_{t+t_0} - B_{t_0})(B_{s+t_0} - B_{t_0})] \\ &= \mathbb{E}[(B_{t+t_0})(B_{s+t_0})] - \mathbb{E}[(B_{t+t_0})(B_{t_0})] - \mathbb{E}[(B_{t_0})(B_{s+t_0})] + \mathbb{E}[(B_{t_0})^2] \\ &= \min(t + t_0, s + t_0) - \min(t + t_0, t_0) - \min(t_0, s + t_0) + \min(t_0, t_0) \\ &= s + t_0 - t_0 - t_0 + t_0 = s \quad t_0 < s, t \text{ ou } t_0 > s, t. \end{aligned}$$

Logo a v.a.  $W_t - W_s$  tem distribuição *normal* com média zero e variância  $t - s$ , isto é,  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ . Logo pela Proposição (3.2.2) o processo,  $W_t = B_{t+t_0} - B_{t_0}$ , com  $t_0$  fixo, é um MB.

Na figura 22 temos um MB com sua invariância por translação, para  $t_0 = 0.2$ .

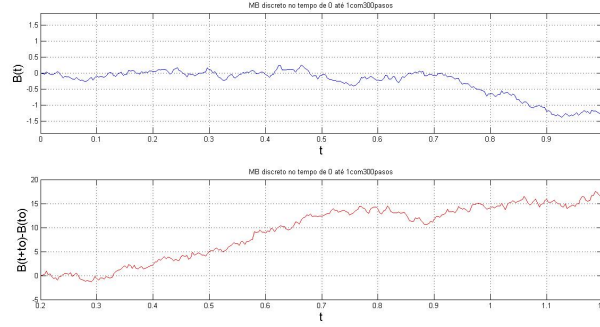


Figura 22 – Movimento browniano  $B_t$  e  $B_{t+t_0} - B_{t_0}$  com 300 passos, com  $t \in [0, 1]$  e  $t_0 = 0.2$

- 5) **(Invariância por translação)** depois de um tempo de parada  $T_0$ ). [((ATHREYA; LAHIRI, 2006)) Cap. 15 seção 15.2]

Recordemos inicialmente, que uma v.a.  $T(\omega)$  com valores em  $[0, \infty)$  é chamado tempo de parada do MB,  $B_t$ , se para cada  $t \in [0, \infty)$  o evento  $\{T \leq t\}$  esta na  $\sigma$ -álgebra

$$\mathfrak{F}_t \equiv \sigma(B_s : s \geq t).$$

Gerada pela trajetória  $B_s$  para  $0 \leq s \leq t$ . Alguns exemplos de tempos de parada:

$$T_a = \min \{t : t \geq 0, B_t \geq a\} \quad \text{para } 0 < a < \infty.$$

$$T_{a,b} = \min \{t : t > 0, B_t \notin (a, b)\} \quad \text{onde } a < 0 < b.$$

Definimos agora o que qual o processo que chamamos de invariância por translação depois de um tempo de parada  $T_0$ .

Denote por  $T_0$  tempo de parada do MB,  $B_t$ , com  $t \geq 0$ . O processo  $B_{T_0}(t) \equiv \{B(T_0 + t) - B(T_0) : t \geq 0\}$  é um MB. De fato, pela propriedade anterior, propriedade (4), Se o  $T_0$  é constante, temos então que o processo  $B_{T_0}(t)$  é um MB.

Se  $T_0$  toma valores em conjunto enumerável, digamos,  $\{a_j\}_{j \geq 1}$  então condicionando o processo  $B_{T_0}(t)$  a cada evento  $T_0 = a_j$ ,  $B_{T_0} = \sum_{j=1}^{\infty} B_{T_0} 1_{T_0=a_j}$ , e usando a propriedade (4) o processo  $B_{T_0}(t) \equiv \{B(T_0 + t) - B(T_0) : t \geq 0\}$  é um MB.

Agora, seja  $T_0$  um tempo de parada geral, o qual pode ser aproximado por uma sequência  $T_n$  de tempos de parada onde para  $n$ ,  $T_n$  é discreto, logo pela continuidade das trajetórias,  $\{B_{T_0}(t) : t \geq 0\}$  tem a mesma distribuição que  $\{B_{T_n}(t) : t \geq 0\}$  quando  $n \rightarrow \infty$ .



Uma consequência das duas propriedades (4) e (5), é que o MB tem a propriedade de Markov e também a propriedade forte de Markov, ou seja, para cada  $t_0$  fixo, a distribuição de  $B_t$ , com  $t \geq t_0$ , dado  $B_s$  com  $s \leq t_0$  depende só do  $B(t_0)$ , e para cada tempo de parada  $T_0$  a distribuição de  $B_t$  com  $t \geq T_0$  dado  $B_s$  com  $s \leq T_0$  depende só de  $B(T_0)$ , que é a propriedade forte de Markov.

6) **(Princípio de reflexão).** [(ATHREYA; LAHIRI, 2006)] Cap. 15 seção 15.2]

Sejam  $a > 0$  fixo e  $B_t$  com  $t \geq 0$  um MB e seja  $T_a$  o tempo que pela primeira vez o MB atinge  $a$ , ou seja,  $T_a = \inf \{t : B_t \geq a\}$ . Queremos saber qual é função de densidade para  $T_a$ . Temos o seguinte resultado: Para qualquer  $t > 0$  e  $a > 0$  temos que:

$$\mathbb{P}[T_a \leq t] = \mathbb{P}[T_a \leq t, B_t > a] + \mathbb{P}[T_a \leq t, B_t < a].$$

Pela continuidade das trajetórias  $B_{T_a} = a$  com  $\{T_a \leq t\}$ . O segundo termo do lado direito na desigualdade anterior pode ser calculado do seguinte modo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T_a \leq t, B_t < a] &= \mathbb{P}[T_a \leq t, B_t < B_{T_a}] = \mathbb{P}[T_a \leq t, B_t - B_{T_a} < 0] \\ &= \mathbb{P}[T_a \leq t, B_t - B_{T_a} > 0] = \mathbb{P}[T_a \leq t, B_t > a]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Assim

$$\mathbb{P}[T_a \leq t] = 2\mathbb{P}(T_a \leq t, B_t > a).$$

Note que pela propriedade (4),  $\{B(T_a + h) - B(T_a) : h \geq 0\}$  é independente de  $T_a$  e tem a mesma distribuição e portanto  $\{-(B(T_a + h) - B(T_a)) : h \geq 0\}$  é também independente de  $T_a$  e tem a mesma distribuição. Logo

$$\begin{aligned} F_{T_a}(t) &= \mathbb{P}[T_a \leq t] = 2\mathbb{P}[T_a \leq t, B(t) > a] = 2\mathbb{P}[B_t > a] \\ &= 2(1 - \mathbb{P}[B_t \leq a]) = 2\left(1 - \mathbb{P}\left[\frac{B_t}{\sqrt{t}} \leq \frac{a}{\sqrt{t}}\right]\right) \\ &= 2\left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{a}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

Logo derivando  $F_{T_a}(t)$  com relação a  $t$  temos que a função de densidade para  $T_a$  é

$$f_{T_a}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2t}} \frac{a}{2t^{\frac{3}{2}}} = \frac{ae^{-\frac{a^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi}t^{\frac{3}{2}}}.$$

Note que temos também que

$$\mathbb{P}[T_a \leq t] = 2\mathbb{P}[B_t \geq a] = \mathbb{P}[|B_t| \geq a].$$

Em resumo podemos definir o princípio de reflexão como o processo

$$\tilde{B}_t \equiv \begin{cases} B_t & \text{se } t \leq T_a \\ 2B_{T_a} - B_t & \text{se } t > T_a \end{cases}$$

- 7) **(Lei dos grandes números).** [(KARATZAS; SHREVE, 1991)] Cap. 2 problema 9.3]

**Proposição 3.3.1.** *Seja  $B_t$  um MB com  $t \geq 0$  então quase certamente*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0. \quad (3.18)$$

*Demonstração.* Antes vamos provar que para  $n \in \mathbb{Z}^+$  temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{n} = 0.$$

Seja  $\epsilon > 0$  e recorde que  $\frac{B(n)}{\sqrt{n}}$  tem distribuição  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left[ \frac{B(n)}{n} > \epsilon \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left[ \frac{B(n)}{\sqrt{n}} > \epsilon \sqrt{n} \right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon \sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(n\epsilon^2)}{2}}. \quad (3.19)$$

A onde a desigualdade acima é o resultado de usar o Lema (2.1.1). Note que a soma de (3.19) é finita. Usando o Lema de Borel-Cantelli, Teorema (2.5.1), obtemos que existe  $N$  tal que, para todo  $n \geq N$ ,

$$\frac{B(n)}{n} < \epsilon \quad \text{q.c.}$$

Por outro lado, usando a simetria da distribuição *normal* temos que

$$\mathbb{P} \left[ \frac{B(n)}{n} < -\epsilon \right] = \mathbb{P} \left[ -\frac{B(n)}{n} > \epsilon \right] = \mathbb{P} \left[ \frac{B(n)}{n} > \epsilon \right]. \quad (3.20)$$

Assim para  $n$  suficientemente grande, temos

$$\frac{B(n)}{n} > -\epsilon \quad \text{q.c.}$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{n} = 0 \quad \text{q.c.}$$

Para estender o resultado para todo tempo não-negativo  $t$  é suficiente mostrar que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \max_{n < t \leq n+1} B(t) - B(n) \right) = 0.$$

Note que para  $\epsilon > 0$ , pelo princípio de reflexão, propriedade (6) e o fato que  $B(1)$  tem distribuição  $\mathcal{N}(0, 1)$ , implica que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left[ \max_{0 \leq t \leq 1} B(t) > \epsilon n \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} [T_{\epsilon n} \leq 1] = \sum_{n=1}^{\infty} 2\mathbb{P} [B(1) \geq \epsilon n] \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(n^2 \epsilon^2)}{2}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Visto que a soma de (3.21) é finita, logo pelo Lema de Borel-Cantelli, Teorema (2.5.1) implica que

$$\mathbb{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} [\max_{0 \leq t \leq 1} B(t)] > \epsilon n \right) = 0.$$

Pela propriedade de invariância do tempo

$$\max_{0 \leq t \leq 1} B(t) \quad e \quad \max_{n \leq t \leq n+1} B(t) - B(n).$$

Tem a mesma distribuição, assim para  $n$  suficientemente grande, temos

$$\frac{1}{n} \left( \max_{n \leq t \leq n+1} B(t) - B(n) \right) < \epsilon \quad \text{q.c}$$

portanto,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \max_{n \leq t \leq n+1} B(t) - B(n) \right) = 0.$$

Como a distribuição de  $B(t)$  é normal, e como tem simétrica em relação ao 0, então, temos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \max_{n \leq t \leq n+1} |B(t) - B(n)| \right) = 0.$$

Como  $\frac{B(t)}{t}$  é limitado por

$$\frac{1}{n} \left( B(n) + \max_{n \leq t \leq n+1} |B(t) - B(n)| \right) \quad \text{para } n \leq t \leq n+1$$

Assim, temos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0$

□

- 8) **(Não Monotonia)** Quase certamente, para todo  $0 < a < b < \infty$ , o MB,  $B_t$  não é monótono no intervalo  $[a, b]$ . [((KARATZAS; SHREVE, 1991)) Cap. 2 Teorema 9.9] Primeiro fixar um intervalo não degenerado  $[a, b]$ , ou seja, um intervalo de comprimento positivo e vamos supor que temos um intervalo com monotonicidade, isto é,  $B_s \leq B_t$  para todo  $a \leq s \leq t \leq b$ , então tomamos uma partição de tempos

$$a = t_0 \leq \dots \leq t_n = b.$$

E dividimos o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos, com  $t_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ , assim temos que cada incremento  $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$  tem o mesmo sinal, ou seja,

$$\mathbb{P}[B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \geq 0] = \frac{1}{2} \quad \text{para } i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Considere o evento  $A = \{B \text{ é não decrescente em } [a, b]\}$ , assim temos que

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Com

$$A_n = \bigcap_{i=1}^n [B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \geq 0].$$

Portanto usando o fato que  $B_t$  tem incrementos independentes, temos que

$$\mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^n [B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \geq 0]\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}[B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \geq 0] = \frac{1}{2^n}.$$

Assim

$$\mathbb{P}[A] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_n] = 0.$$

Isto mostra que a probabilidade de que o intervalo,  $(a, b)$ , seja monótono deve ser zero, e tomando a união contável sobre todos os intervalos com extremos racionais podemos ver que  $B_t$  é quase certamente não monótono em qualquer intervalo com extremos racionais. Pela densidade de  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  existe um intervalo com extremos racionais contidos dentro de cada intervalo. Logo cada intervalo contém um subintervalo que não é quase certamente monótono. portanto em cada intervalo  $B_t$  não é quase certamente monótono.

### 9) (*Hölder contínua*)

Sabemos que por construção,  $B_t$  é contínuo quase certamente. Neste item vamos provar que o MB é *Hölder* contínuo com expoente  $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ , e não é *Hölder* contínuo com  $\gamma \geq \frac{1}{2}$ . Iniciamos recordando a definição de *Hölder* continuidade e um resultado, devido a Kolmogorov, que nos fornece uma condição suficiente para ter *Hölder* continuidade.

**Definição 3.3.1. (*localmente Hölder contínua*)** Uma função  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *localmente  $\alpha$ -Hölder contínua*. se existe um  $\epsilon > 0$  e um  $c > 0$  tal que para todo  $y \geq 0$  temos que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad \text{com } |y - x| < \epsilon \text{ e } 0 < \alpha \leq 1.$$

Nos referimos de  $\alpha$ , como o *Hölder* expoente e  $c$  a *Hölder* constante.

**Definição 3.3.2.** Um processo estocástico  $(Y_t)_{t \geq 0}$  é chamado de *modificação de  $(X_t)_{t \geq 0}$*  se, para qualquer  $t \in T$ , nós temos  $\mathbb{P}[X_t = Y_t] = 1$ .

Ou seja, um processo é modificação de outro se ambos têm a mesmo sistema de distribuições finito-dimensionais.

**Teorema 3.3.1. (*Critério de continuidade de Kolmogorov-Centsov*).** Supor que temos um processo  $X = \{X_t; 0 \leq t \leq T\}$  em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$  que satisfaz a condição

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\alpha] \leq C|t - s|^{1+\beta} \quad 0 \leq s, t \leq T.$$

Para  $\alpha, \beta$  e  $C$  constantes positivas. Então, existe uma modificação contínua

$$\tilde{X} = \{\tilde{X}_t; 0 \leq t \leq T\}$$

de  $X$  que é localmente Hölder contínua com expoente  $\gamma \in (0, \frac{\beta}{\alpha})$ , isto é, para  $s, t \in [0, T]$

$$\mathbb{P} \left[ \omega : \sup_{0 < t-s < h(\omega)} \frac{|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)|}{|t-s|^\gamma} \leq \delta \right] = 1$$

Onde  $h(\omega)$  é uma v.a. quase certamente positiva e  $\delta > 0$  é uma constante apropriada.

A demonstração pode ser obtida em [(KARATZAS; SHREVE, 1991) Cap 2 seção 2.2 pag 53-55].

Para poder verificar o critério no caso do MB, lembremos que  $B_t - B_s$  tem distribuição  $\mathbf{N}(0, t-s)$  e usando o Lema (3.2.2), para  $n = 2$  temos que

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^4] = 3(t-s)^2.$$

Portanto atende o critério de continuidade de kolmogorov com  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 1$  e  $C = 3$ . Logo fica estabelecida, de uma maneira alternativa, a existência da continuidade das trajetórias do MB.

**Proposição 3.3.2.** [(MÖRTERS; PERES, 2010) Cap. 1. corolário 1.20] Para quase todos os  $\omega \in \Omega$ , o caminho browniano  $X(\omega)$  é Hölder contínuo com  $\gamma < \frac{1}{2}$ .

*Demonstração.* Proposição (3.3.2) este resultado será mostrado, usando el Teorema (3.3.1) e o Lema (3.2.2). Usando o Lema (3.2.2) temos que

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^{2n}] = C_n h^n.$$

Mas pelo Teorema (3.3.1), temos que existe uma modificação contínua de  $B_t$  que é localmente Hölder contínua com expoente  $\gamma \in (0, \frac{\beta}{\alpha})$ , ou seja, temos que

$$1 + \beta = n \quad e \quad \alpha = 2n$$

Assim temos que  $\gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{n-1}{2n}$ , portanto quando  $n \rightarrow \infty$  temos que  $\gamma \rightarrow \frac{1}{2}$  o que termina a demonstração da Proposição (3.3.2)  $\square$

Lembremos a Proposição (3.2.1), demonstrada e usada na existência do MB, ela foi útil para v.a. *normais*, mas, agora vamos precisar da versão deste resultado para o MB, ou seja, precisamos do seguinte Lema

**Lema 3.3.1.** [(MÖRTERS; PERES, 2010) Cap. 2. Teorema 1.11] Para quase todo  $\omega \in \Omega$ . Sejam  $B_t(\omega)$  uma trajetória do MB,  $c < \sqrt{2}$  e  $\epsilon > 0$ , então existe  $0 < h < \epsilon$  e  $0 \leq t \leq 1-h$  com

$$|B_{t+h}(\omega) - B_t(\omega)| \geq c\sqrt{h \ln(h)} \quad \omega.q.c$$

*Demonstração.* Lema (3.3.1) Dado  $c < \sqrt{2}$  e inteiros  $k, n \geq 0$ . Defina o seguinte conjunto de eventos

$$A_{k,n} := \left\{ \left| B_{\frac{(k+1)}{e^n}}(\omega) - B_{\frac{k}{e^n}}(\omega) \right| > c\sqrt{n}e^{-\frac{n}{2}} \right\}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_{k,n}] &= \mathbb{P} \left[ \left| B_{\frac{(k+1)}{e^n}}(\omega) - B_{\frac{k}{e^n}}(\omega) \right| > c\sqrt{n}e^{-\frac{n}{2}} \right] = \mathbb{P}[B_{e^{-n}} > c\sqrt{n}e^{-\frac{n}{2}}] \\ &= \mathbb{P} \left[ \frac{B_{e^{-n}}}{\sqrt{e^{-n}}} > c\sqrt{n} \right] = \mathbb{P} [Z \sim N(0, 1) > c\sqrt{n}] \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{c\sqrt{n}}{c^2n + 1} e^{-c^2 \frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Onde a segunda igualdade é porque  $B_t - B_s$  tem a mesma distribuição que  $B_{t-s}$ , a quarta igualdade é porque  $\frac{B_{e^{-n}}}{\sqrt{e^{-n}}} \sim N(0, 1)$  e a última desigualdade é por usar o Lema (2.1.1). Assim com  $c < \sqrt{2}$  temos que

$$e^n \mathbb{P}[A_{k,n}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

E sabemos que  $1 - x \leq e^{-x}$  para toda  $x$ ,. Usando este fato, obtemos

$$\mathbb{P} \left[ \bigcap_{k=0}^{\lfloor e^n - 1 \rfloor} A_{k,n}^c \right] = (1 - \mathbb{P}[A_{0,n}])^{e^n} \leq \exp(-e^n \mathbb{P}[A_{0,n}]) \rightarrow 0.$$

Agora, considere que, para qualquer  $\epsilon > 0$ , existe um  $h \in (0, \epsilon)$  e um  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $h = e^{-n}$ . Em seguida, segue-se que para qualquer  $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left[ \omega \in \Omega : \forall h \in (0, \epsilon), \forall t \in [0, 1 - h], |B_{t+h}(\omega) - B_t(\omega)| < c\sqrt{h \ln(h)} \right] = 0$$

□

**Teorema 3.3.2.** [(KARATZAS; SHREVE, 1991) Cap.2 exercício 9.21] Para quase todos os  $\omega \in \Omega$ , o caminho browniano  $X(\omega)$  não é Hölder contínua com expoente  $\gamma > \frac{1}{2}$

*Demonstração.* Dado  $\gamma > \frac{1}{2}$  para um  $h$  suficientemente pequeno, obtemos que  $1 > h e^{h^{2\gamma-1}}$  o que implica que  $\frac{1}{h} > e^{h^{2\gamma-1}}$  então  $\sqrt{h \ln(\frac{1}{h})} > h^\gamma$  e aplicando o Lema (3.3.1), temos o resultado desejado. □

**Teorema 3.3.3** (((MÖRTERS; PERES, 2010)) exercício 4.4). para quase todo  $\omega \in \Omega$  o MB,  $B_t(\omega)$  não é Hölder contínuo com expoente  $\gamma = \frac{1}{2}$

*Demonstração.* Seja  $j > 0$  e definamos o conjunto

$$H = \left\{ \omega \in \Omega : |B_t(\omega) - B_{t+h}(\omega)| \leq j h^{\frac{1}{2}} \quad \forall t > 0 \text{ e } \forall h > 0 \right\}.$$

Ou seja, o conjunto  $H$  é todos as trajetórias do MB que são *Hölder* contínuas com expoente  $\frac{1}{2}$  e coeficiente  $j$ . Mostremos que  $\mathbb{P}[H] = 0$  (independentemente do  $j$ )  
Sejam  $n^* \in \mathbb{N}$ , com  $n^* > j^2$  e  $c$  tal que  $1 < c < \sqrt{2 \ln(2)}$  e o conjunto de eventos

$$A_{k,n} := \left\{ \omega \in \Omega : \left| B_{(k+1)2^{-n}} - B_{k2^{-n}} \right| > c\sqrt{n}2^{-\frac{n}{2}} \right\}.$$

Uma vez que  $j < c\sqrt{n^*}$ , observe que

$$H \subseteq \bigcap_{n=n^*}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{2^n} A_{k,n}^c.$$

é demonstrar que

$$\mathbb{P} \left[ \bigcap_{n=n^*}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{2^n} A_{k,n}^c \right] = 0.$$

Usando o Lema (2.1.1) temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_{k,n}] &= \mathbb{P} \left[ \left| B_{(k+1)2^{-n}} - B_{k2^{-n}} \right| > c\sqrt{n}2^{-\frac{n}{2}} \right] = \mathbb{P} \left[ |B_{2^{-n}}| > c\sqrt{n}2^{-\frac{n}{2}} \right] \\ &= \mathbb{P} \left[ \left| \frac{B_{2^{-n}}}{\sqrt{2^{-n}}} \right| > c\sqrt{n} \right] = \mathbb{P} [B_1 > c\sqrt{n}] \quad B_1 \sim \mathbf{N}(0, 1) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{c\sqrt{n}}{c^2n + 1} e^{-\frac{c^2n}{2}} \end{aligned}$$

Onde a última desigualdade é justificada pelo Lema (2.1.1) Assim

$$\mathbb{P}[A_{k,n}] \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{c\sqrt{n}}{c^2n + 1} e^{-\frac{c^2n}{2}}. \quad (3.22)$$

Como

$$c < \sqrt{2 \ln(2)} \Rightarrow \frac{-c^2}{2} > \ln(2).$$

Temos

$$2e^{\frac{-c^2}{2}} > 1.$$

E assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n e^{\frac{-c^2n}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{c\sqrt{n}}{c^2n + 1} = \infty.$$

Usando a expressão (3.22) obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \mathbb{P}[A_{k,n}] = \infty.$$

E visto que  $1 - x \leq e^{-x}$  obtemos

$$\mathbb{P} \left[ \bigcap_{k=1}^{2^n} A_{k,n}^c \right] = [1 - \mathbb{P}[A_{k,n}]]^{2^n} \leq e^{-2^n \mathbb{P}[A_{k,n}]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

O que termina a prova do Teorema. □

10) **(Distribuição Máximo e Mínimo do MB).**

Sejam  $B(t)$  um MB e  $M(t)$  o nível máximo atingido pelo MB no intervalo  $[0, t]$ , e  $m(t)$  o nível mínimo atingido pelo MB no intervalo  $[0, t]$ , ou seja,

$$M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} B(s) \quad e \quad m(t) = \min_{0 \leq s \leq t} B(s)$$

**Proposição 3.3.3** ((MÖRTERS; PERES, 2010) Cap. 2. Teorema 2.21). *Para qualquer  $x > 0$  temos que*

$$\mathbb{P}[M(t) \geq x] = 2\mathbb{P}[B(t) \geq x] = 2 \left( 1 - \Phi \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \right).$$

Onde  $\Phi(x)$  representa a função de distribuição normal padrão. Mais ainda,

$$\mathbb{P}[m(t) \leq -x] = 2\mathbb{P}[B(t) \leq -x].$$

*Demonstração.* Observe-se que o evento

$$\{M(t) \geq x\} = \{T_x \leq t\}.$$

Onde  $T_x$  é o tempo que  $B(t)$  atinge o valor máximo, logo temos que

$$\mathbb{P}[B(t) \geq x] = \mathbb{P}[B(t) \geq x, T_x \leq t].$$

E pela continuidade de  $B$ , temos que  $B(T_x) = x$ . Assim

$$\mathbb{P}[B(t) \geq x] = \mathbb{P}[T_x \leq t, B(T_x + (t - T_x)) - B(T_x) \geq 0].$$

Como  $T_x$  é um tempo de parada finito. Pela propriedade forte de Markov, propriedade (4), temos

$$\hat{B}(t) = B(T_x + s) - B(T_x).$$

é um MB, que é independente da  $\sigma$ -álgebra,  $\mathfrak{F}_{T_x}$ . Então quando  $t \geq T_x$  temos que

$$\mathbb{P}[\hat{B}(t - T_x) \geq 0 \mid \mathfrak{F}_{T_x}] = \frac{1}{2}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[B(t) \geq x] &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{I} \{T_x \leq t\} \mathbb{P}(\hat{B}(t - T_x) \geq 0 \mid \mathfrak{F}_{T_x}) \right] = \mathbb{E} \left[ \mathbb{I} \{T_x \leq t\} \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}[T_x \leq t] = \frac{1}{2} \mathbb{P}[M(t) \geq x]. \end{aligned}$$

Logo  $\mathbb{P}[M(t) \geq x] = 2\mathbb{P}[B(t) \geq x]$

Vamos a mostrar a última igualdade da proposição, ou seja

$$2\mathbb{P}[B(t) \leq -x] = 2 \left( 1 - \Phi \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \right).$$



Sabemos que

$$\begin{aligned}
 2\mathbb{P}[B(t) \geq x] &= 2(1 - \mathbb{P}[B(t) \leq x]) = 2(1 - \mathbb{P}[\frac{B(t)}{\sqrt{t}} \leq \frac{x}{\sqrt{t}}]) \\
 &= 2 \left( 1 - \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) = 2 \left( 1 - \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \right) \\
 &= 2 \left( 1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right).
 \end{aligned}$$

O que queríamos demonstrar. Para encontrar a distribuição do mínimo  $m(t) = \min_{0 \leq s \leq t} B(s)$  usamos um argumento de simetria, ou seja

$$-\min_{0 \leq s \leq t} B(s) = \max_{0 \leq s \leq t} (-B(s)).$$

Note que  $-B(t)$  é também um MB, daqui resulta que, para  $x < 0$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} \left( \min_{0 \leq s \leq t} B(s) \leq x \right) &= \mathbb{P} \left( \max_{0 \leq s \leq t} (-B(s)) \geq -x \right) \\
 2\mathbb{P}(-B(t) \geq -x) &= 2\mathbb{P}(B(t) \leq x)
 \end{aligned}$$

□

- 11) **(Lei do logaritmo iterado).** Descreve as oscilações das trajetórias do MB perto de zero e no infinito.

**Proposição 3.3.4.** [(KARATZAS; SHREVE, 1991) Cap. 2. Teorema 9.23] Seja  $(B_t)_{t \geq 0}$  um MB então quase certamente

$$a) \quad \max \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(\frac{1}{t})}} = 1 \quad b) \quad \min \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(\frac{1}{t})}} = -1$$

Sabemos pela propriedade (2) que  $\hat{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}$  também é um MB, então quase certamente

$$c) \quad \max \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(t)}} = 1 \quad d) \quad \min \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(t)}} = -1$$

Note que no item (a) aplicando a propriedade (3), a propriedade de simetria,  $-B_t$ , temos o item (b) e no item (c) aplicando a propriedade (2), a propriedade de inversão do tempo  $tB_{\frac{1}{t}}$  temos o item (d). Para quase toda trajetória, podemos construir duas sequências  $t_n$  e  $s_n$  crescentes e divergentes para  $+\infty$  com  $s_n < t_n < s_{n+1}$  tal que

$$B_{t_n} \geq \sqrt{t_n \log \log(t_n)} \quad e \quad B_{s_n} \leq -\sqrt{s_n \log \log(s_n)}.$$

Então vemos que as oscilações de cada trajetória aumenta mais e mais; além disso, devido à continuidade, vemos que as trajetórias tocam um valor real em infinitas vezes.

*Demonstração.* Proposição (3.3.4) item a), provemos primeiro que

$$\max \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(\frac{1}{t})}} \leq 1 \quad (3.23)$$

Seja  $h(t) = \sqrt{\log \log(\frac{1}{t})}$  e fixe  $\delta \in (0, 1)$ , nós escolhemos  $\theta \in (0, 1)$  com  $n \in \mathbb{N}^+$  tal que

$$\lambda = \frac{(1 + \delta)^2}{2\theta^n} > 1.$$

Defina uma sequência de tempos  $t_n = \theta^n$  decrescente para 0 e considere os eventos

$$A_n = \left\{ \max_{t \in [t_{n+1}, t_n]} B_t > (1 + \delta)h(t) \right\}.$$

$h(t) = \sqrt{\log \log(\frac{1}{t})}$  Se provarmos que  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$  converge, teremos pelo Lema Borel-Cantelli, Teorema (2.5.1), que  $\mathbb{P}[A_n(i.v)] = \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0$ , ou seja, que para  $\omega$  fora de um conjunto de medida nula, existe  $n_0 = n_0(\omega)$  tal que para qualquer  $n \geq n_0$

$$\max_{t \in [t_{n+1}, t_n]} B_t(\omega) < (1 + \delta)h(t).$$

Assim temos que

$$\limmax_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t(\omega)}{h(t)} \leq (1 + \delta) \quad \text{q.c}$$

E como  $\delta$  é arbitrário temos (3.23). Para podermos calcular  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ , primeiro devemos estimar a probabilidade de  $A_n$ . Note a seguinte inclusão

$$A_n \subset \left\{ \max_{t \in [0, t_n]} B_t > (1 + \delta)h(t_{n+1}) \right\}.$$

Usando a propriedade (10) temos a seguinte estimativa sobre a probabilidade deste evento:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left\{ \max_{t \in [0, t_n]} B_t > (1 + \delta)h(t_{n+1}) \right\}\right) &\leq 2\mathbb{P}[B_{t_n} > (1 + \delta)h(t_{n+1})] \\ &\leq 2\mathbb{P}\left(\frac{B_{t_n}}{\sqrt{t_n}} > \frac{(1 + \delta)h(t_{n+1})}{\sqrt{t_n}}\right). \end{aligned}$$

Sabemos que v.a.  $\frac{B_{t_n}}{\sqrt{t_n}}$  tem distribuição normal  $\mathbf{N}(0, 1)$ , e usando o Lema (2.1.1): Por simplicidade  $x_n = \frac{(1+\delta)h(t_{n+1})}{\sqrt{t_n}} = \frac{(1+\delta) \log[(n+1) \log(\frac{1}{\theta})]}{2\sqrt{\theta^n}}$  temos que:

$$\mathbb{P}\left(\left\{ \max_{t \in [0, t_n]} B_t > (1 + \delta)h(t_{n+1}) \right\}\right) = 2\mathbb{P}\left(\frac{B_{t_n}}{\sqrt{t_n}} > x_n\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}x_n} e^{-\frac{x_n^2}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2}}.$$

Calculando  $x_n^2$ , para  $n > 0$  temos que

$$x_n^2 = \frac{(1 + \delta)^2}{\theta^n} \log((n + 1) \log(\frac{1}{\theta})) = 2\lambda \log\left[(n + 1) \log(\frac{1}{\theta})\right]$$

então

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(A_n) &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x_n^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{e^{\frac{1}{2}(2\lambda \log[(n+1)\log(\frac{1}{\theta})])}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{[(n+1)\log(\frac{1}{\theta})]^\lambda} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{(n+1)^\lambda} \right) \left( \frac{1}{[\log(\frac{1}{\theta})]^\lambda} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} [\log(\frac{1}{\theta})]^\lambda} \left( \frac{1}{(n+1)^\lambda} \right).
 \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n) \leq C \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{(n+1)^\lambda} \right). \quad (3.24)$$

Sabemos que  $C < 1$ , com  $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi} [\log(\frac{1}{\theta})]^\lambda}$  e  $\lambda > 1$  e para qualquer  $\delta, \theta \in (0, 1)$  fixo. Assim a soma da expressão (3.24) é finita. Portanto  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n) \leq \infty$ . Agora vamos provar

$$\max \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(\frac{1}{t})}} \geq 1. \quad (3.25)$$

Para assim ter a igualdade do item a). A prova é baseada em uma aplicação da segunda parte do Lema Borel-Cantelli, Teorema (2.5.1). Devemos lembrar que  $t$  é decrescente para zero,  $t_n > t_{n+1}$ . Continuamos com a mesma notação. Escolha primeiro  $\epsilon$  e  $\theta \in (0, 1)$  e definem-se os eventos

$$A'_n = \left\{ B_{t_n} - B_{t_{n+1}} \geq (1 - \epsilon)h(t_n) \right\}.$$

Sabemos que os eventos  $A'_n$  são independentes, pois, as v.a.  $Z_n = \frac{B_{t_n} - B_{t_{n+1}}}{\sqrt{t_n - t_{n+1}}}$  são independentes. Para poder provar que  $\sum_n \mathbb{P}(A'_n)$  diverge a ideia consiste em usar a desigualdade da esquerda no Lema (2.1.1), então, como  $Z_n \sim \mathbf{N}(0, 1)$  assim para  $x$  suficientemente grande temos que

$$\mathbb{P} \left( \frac{B_{t_n} - B_{t_{n+1}}}{\sqrt{t_n - t_{n+1}}} > x_n \right) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x_n} e^{-\frac{x_n^2}{2}}.$$

Se tomarmos  $x_n = (1 - \epsilon) \frac{h(t_n)}{\sqrt{t_n - t_{n+1}}} = \frac{(1 - \epsilon) \log[(n) \log(\frac{1}{\theta})]}{2\sqrt{\theta^n} \sqrt{(1 - \theta)}}$  e  $\lambda = \frac{(1 - \epsilon)^2}{2\theta^n} > 1$  temos que

$$x_n^2 = \frac{(1 - \epsilon)^2 \log[(n) \log(\frac{1}{\theta})]}{2\theta^n (1 - \theta)} = 2\lambda \frac{\log[(n) \log(\frac{1}{\theta})]}{(1 - \theta)}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\frac{B_{t_n} - B_{t_{n+1}}}{\sqrt{t_n - t_{n+1}}} > x\right) = \mathbb{P}(A'_n) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x_n} e^{-\frac{x_n^2}{2}} = \\
& = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{\frac{(1-\epsilon) \log[(n) \log(\frac{1}{\theta})]}{2\sqrt{\theta^n} \sqrt{(1-\theta)}}} \right) \left( \frac{1}{e^{\log[(n) \log(\frac{1}{\theta})] \frac{\lambda}{(1-\theta)}}} \right) \\
& = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{2\sqrt{\theta^n} \sqrt{(1-\theta)}}{(1-\epsilon) \log[(n) \log(\frac{1}{\theta})]} \right) \left( \frac{1}{[(n) \log(\frac{1}{\theta})]^{\frac{\lambda}{(1-\theta)}}} \right) \\
& = \frac{2\sqrt{(1-\theta)}}{\sqrt{2\pi}(1-\epsilon)} \left( \frac{\sqrt{\theta^n}}{\log[(n) \log(\frac{1}{\theta})]} \right) \left( \frac{1}{[(n) \log(\frac{1}{\theta})]^{\frac{\lambda}{(1-\theta)}}} \right) \\
& \stackrel{r=(n) \log(\frac{1}{\theta})}{=} \frac{2\sqrt{(1-\theta)}}{\sqrt{2\pi}(1-\epsilon)} \left( \frac{\sqrt{\theta^n}}{\log[r]} \right) \left( \frac{1}{[r]^{\frac{\lambda}{(1-\theta)}}} \right) \\
& = \frac{2\sqrt{(1-\theta)}(1-\epsilon)}{\sqrt{2\pi}(1-\epsilon)\sqrt{2}\sqrt{\lambda}} \left( \frac{1}{\log[r]} \right) \left( \frac{1}{[r]^{\frac{\lambda}{(1-\theta)}}} \right) \\
& = \frac{\sqrt{(1-\theta)}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda}} \left( \frac{1}{\log[r]} \right) \left( \frac{1}{[r]^{\frac{\lambda}{(1-\theta)}}} \right).
\end{aligned}$$

Se chamamos  $C = \frac{\sqrt{(1-\theta)}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda}}$  e sabemos que  $\frac{\lambda}{(1-\theta)} > 1$  tem-se

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A'_n) \geq C \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{[r]^{\frac{\lambda}{(1-\theta)}} \log[r]} \right) = \left( \frac{1}{[(n) \log(\frac{1}{\theta})]^{\frac{\lambda}{(1-\theta)}} \log[(n) \log(\frac{1}{\theta})]} \right) > \frac{1}{n \log(n)}$$

logo este termo é o termo geral de uma série divergente. Em seguida, por Lema Borel-Cantelli, Teorema (2.5.1) temos

$$\mathbb{P}(B_{t_n} - B_{t_{n+1}} \geq (1-\epsilon)h(t_n) \text{ infinitas vezes}) = 1.$$

Usando (3.23) aplicado ao movimento browniano  $-B_t, t \geq 0$  temos que  $B_{t_{n+1}} \geq -(1+\epsilon)h_{t_{n+1}}$  com  $n \rightarrow \infty$ . Portanto temos para infinitos índices  $n$

$$\begin{aligned}
B_{t_n} & \geq (1-\epsilon)h(t_n) - (1+\epsilon)h_{t_{n+1}} \\
& = h(t_n) \left( 1-\epsilon - (1+\epsilon) \frac{h_{t_{n+1}}}{h_{t_n}} \right).
\end{aligned}$$

Usando o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{\theta^{n+1}}}{h_{\theta^n}} = \sqrt{\theta}$  e se  $\epsilon + (1+\epsilon)\sqrt{\theta} < \delta$  temos que

$$B_{t_n} \geq (1-\delta)h(t_n) \text{ infinitas vezes.}$$

Isto conclui a prova do item a).

□

*Demonstração.* Proposição (3.3.4) item c) A ideia principal é escalar por uma sequência geométrica. Vamos primeiro provar a limite superior. Seja  $\epsilon, q > 1$  fixos e  $\psi(t) = \sqrt{2t \log \log(t)}$ . Defina os eventos

$$A_n = \left\{ \max_{t \in [0, q^n]} B_t \geq (1 + \epsilon) \psi(q^n) \right\}.$$

E usando a propriedade (10) temos a seguinte estimativa sobre a probabilidade deste evento:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left\{ \max_{t \in [0, q^n]} B_t \geq (1 + \epsilon) \psi(q^n) \right\} \right) &= 2\mathbb{P}[B_{q^n} \geq (1 + \epsilon) \psi(q^n)] \\ &= \mathbb{P} \left( \frac{B_{q^n}}{\sqrt{q^n}} \geq \frac{(1 + \epsilon) \psi(q^n)}{\sqrt{q^n}} \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \frac{B_{q^n}}{\sqrt{q^n}} \geq x_n \right). \end{aligned}$$

Sabemos que v.a.  $\frac{B_{q^n}}{\sqrt{q^n}}$  tem distribuição normal  $\mathbf{N}(0, 1)$ , e usando o Lema (2.1.1): Por simplicidade  $x_n = \frac{(1+\epsilon)\psi(q^n)}{\sqrt{q^n}}$  temos que:

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \max_{t \in [0, q^n]} B_t \geq (1 + \epsilon) \psi(q^n) \right\} \right) = 2\mathbb{P} \left( \frac{B_{q^n}}{\sqrt{q^n}} \geq x_n \right) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi} x_n} e^{-\frac{x_n^2}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2}}.$$

Calculando  $x_n^2$ , para  $n > 0$  temos que  $x_n^2 = (1 + \epsilon)^2 2 \log [\log(q^n)]$  Assim

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{e^{\frac{(1+\epsilon)^2 2 \log[\log(q^n)]}{2}}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{e^{\log[\log(q^n)](1+\epsilon)^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{[n \log(q)]^{(1+\epsilon)^2}} \right). \end{aligned}$$

Se chamamos  $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  temos que

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n) \leq C \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{[n \log(q)]^{(1+\epsilon)^2}} \right)$$

que é somável em  $n$ , para qualquer  $\epsilon, q > 1$ , assim  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ , logo, pelo Lema Borel-Cantelli, Teorema (2.5.1) sabemos que apenas um número finito destes eventos ocorrem. Para qualquer  $t$ , podemos encontrar que  $n$  tal que  $q^{n-1} \leq t < q^n$ , por tanto

$$\frac{B_t}{\psi(t)} = \frac{B_t}{\psi(q^n)} \frac{\psi(q^n)}{q^n} \frac{t}{\psi(t)} \frac{q^n}{t} \leq (1 + \epsilon)q.$$

Porque  $\frac{\psi(t)}{t}$  é decrescente com respeito á  $t$ , como nossa escolha de  $t$  foi arbitrária, nós temos

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\psi(t)} \leq (1 + \epsilon)q \quad \text{q.c}$$

E como a escolha do  $\epsilon, q$  foi arbitrária, então provamos que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\psi(t)} \leq 1 \quad \text{q.c.}$$

Tendo provado o limite superior, vamos agora provar o limite inferior. Mais uma vez, vamos fazer uso da segunda parte do Lema Borel-Cantelli, Lema (2.5.1) e da sequência geométrica. Fixe  $q > 1$  e defina os eventos  $D_n$  como

$$D_n = \{B_{q^n} - B_{q^{n-1}} \geq \psi(q^n - q^{n-1})\}.$$

Sabemos que os eventos  $D_n$  são independentes, pois  $B_{q^n} - B_{q^{n-1}}$  são independentes. usando o Lema (2.1.1), então, como  $Z_n \sim \mathbf{N}(0, 1)$  assim para  $x$  suficientemente grande temos que  $\mathbb{P}[Z > x] \geq \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}x}$ . A partir deste estimativa, para  $n$  grande, e chamando  $x_n = \frac{\psi(q^n - q^{n-1})}{\sqrt{q^n - q^{n-1}}}$  nós obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[D_n] &= \mathbb{P}\left[\frac{B_{q^n} - B_{q^{n-1}}}{\sqrt{q^n - q^{n-1}}} \geq \frac{\psi(q^n - q^{n-1})}{\sqrt{q^n - q^{n-1}}}\right] = \mathbb{P}[Z \geq x_n] \geq \frac{e^{-\frac{x_n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}x_n} \\ &\geq \frac{e^{-\log[\log(q^n - q^{n-1})]}}{2\log[\log(q^n - q^{n-1})]} \geq \frac{e^{-\log[\log(q^n - q^{n-1})]}}{\sqrt{2\log[n\log(q)]}} > \frac{1}{n\log(n)}. \end{aligned}$$

Assim  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[D_n]$  diverge, para infinitos  $n$  logo

$$B_{q^n} \geq B_{q^{n-1}} + \psi(q^n - q^{n-1}).$$

E do limite superior temos  $B_{q^{n-1}} \leq 2\psi(q^{n-1})$  e por simetria do MB  $B_{q^{n-1}} \geq -2\psi(q^{n-1})$  Portanto, podemos re-escrever a desigualdade acima, como

$$B_{q^n} \geq B_{q^{n-1}} + \psi(q^n - q^{n-1}) \geq -2\psi(q^{n-1}) + \psi(q^n - q^{n-1}).$$

Logo, quase certamente, para infinitos  $n$

$$\frac{B_{q^n}}{\psi(q^n)} \geq \frac{-2\psi(q^{n-1}) + \psi(q^n - q^{n-1})}{\psi(q^n)} \geq \frac{-2}{\sqrt{q}} + \frac{q^n - q^{n-1}}{q^n} = 1 - \frac{2}{\sqrt{q}} - \frac{1}{q}$$

Na segunda desigualdade note que

$$\frac{\psi(q^{n-1})}{\psi(q^n)} = \frac{\psi(q^{n-1})}{\sqrt{q^{n-1}}} \frac{\sqrt{q^n}}{\psi(q^n)} \frac{1}{\sqrt{q}} \leq \frac{1}{\sqrt{q}}.$$

Como  $\frac{\psi(t)}{\sqrt{t}}$  está aumentando em  $t$  para  $t$  suficientemente grande, mas  $\frac{\psi(t)}{t}$  está diminuindo em  $t$  portanto

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\psi(t)} \geq 1 - \frac{2}{\sqrt{q}} - \frac{1}{q}.$$

E como nossa escolha de  $q > 1$  foi arbitrária, temos o "quase certamente" limite inferior é  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\psi(t)} \geq 1$  e combinando com o limite superior, obtemos que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\psi(t)} = 1 \quad \text{q.c.}$$

o que termina a prova item c)

□

- 12) A Proposição seguinte mostra que o crescimento  $\limsup$  de  $B_t$  é mais rápido do que  $\sqrt{t}$

**Proposição 3.3.5** ((MÖRTERS; PERES, 2010) Cap. 1 Proposição 1.23). *Seja  $B(t)$  um MB. Quase certamente*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = +\infty \quad e \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = -\infty$$

*Demonstração.* Usando o Lema de Fatou (2.5.2), temos que

$$\mathbb{P}[B(n) > c\sqrt{n} \text{ infinitas vezes}] \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[B(n) > c\sqrt{n}].$$

Logo usando a invariância pela escala, propriedade (1), e tomando  $a = \frac{1}{\sqrt{n}}$  obtemos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[B(n) > c\sqrt{n}] = \mathbb{P}[B(1) > c].$$

Que é maior do que 0 já que  $B(1)$  tem uma distribuição *normal*  $\mathbf{N}(0, 1)$ .

Seja  $X_n = B(n) - B(n-1)$  e defina o evento

$$A_n = \{B(n) > c\sqrt{n} \text{ infinitas vezes}\} = \left\{ \sum_{j=1}^n X_j > c\sqrt{n} \text{ infinitas vezes} \right\}$$

Segue então a partir do Teorema Hewitt-Savage 0-1, Teorema (2.5.3), que o evento  $A_n$ , ou seja, quase certamente,  $B(n) > c\sqrt{n}$  acontece infinitas vezes. Tomando a intersecção sobre todos os inteiros positivos  $c$ . Temos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = +\infty.$$

A prova de  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = -\infty$  segue um raciocínio semelhante □

- 13) **(Não-diferenciabilidade das trajetórias** (((KARATZAS; SHREVE, 1991)) Teorema 2.9.18]. Para um MB,  $B_t$ , com  $0 \leq t \leq T$  sabemos que:

- a) MB é uma função contínua.
- b) MB não é monótono em qualquer intervalo de tempo, não importa o quão pequeno é o intervalo.

Neste item estamos interessados em saber sobre a diferenciabilidade das trajetórias de um MB. Vamos verificar que o MB não é diferenciável no zero, em seguida mostraremos que não é diferenciável em um  $t$  fixo e por último, não é diferenciável para qualquer  $t$  em  $[0, T]$ , mas primeiramente precisamos recordar a definição de derivada superior e inferior para uma função  $f$ .

**Definição 3.3.3.** *Seja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida no aberto  $(a, b)$ . As derivadas superior e inferior de  $f$  é*

$$D^*f(t) := \limsup_{h \searrow 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \quad e \quad D_*f(t) := \liminf_{h \searrow 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

**Proposição 3.3.6** ((KARATZAS; SHREVE, 1991) Cap. 2 exercício 9.17 e Teorema 2.9.18). *Seja  $t \geq 0$  fixo, quase certamente o MB não é diferenciável em  $t$ . Mais ainda,*

$$D^*B(t) = +\infty \quad e \quad D_*B(t) = -\infty.$$

*Demonstração.* Seja  $B(t)_{t \geq 0}$  um MB, sempre podemos construir outro MB, por dizer,  $X(t)_{t \geq 0}$ , usando a inversão do tempo, propriedade (2), assim temos que

$$D^*X(0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X(\frac{1}{n}) - X(0)}{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} nX(\frac{1}{n}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} \quad (3.26)$$

Mas sabemos pela propriedade anterior, propriedade (12) que a expressão (3.26) é igual a infinito, assim  $D^*X(0) = +\infty$  a segunda parte  $D_*X(0) = -\infty$  segue por um raciocínio semelhante, portanto mostramos que o MB não é diferenciável em 0.

Agora, seja  $t > 0$  arbitrário e seja  $B(t)_{t \geq 0}$  um MB. Usando a propriedade (4) temos que  $Y(s) := B(t+s) - B(t)$  também é um MB, mas nós acabamos de mostrar que o MB não é diferenciável em  $s = 0$  o que implica que  $B$  não é diferenciável em  $t$ .

Finalmente mostremos que quase certamente o MB não é diferenciável para qualquer tempo  $t \geq 0$  e mais  $D^*B(t) = +\infty$  e  $D_*B(t) = -\infty$ .

Suponha que existe um tempo  $t_0 \in [0, 1]$  tal que

$$-\infty < D_*B(t) < D^*B(t) < +\infty$$

então

$$\limsup_{h \searrow 0} \frac{|B(t_0+h) - B(t_0)|}{h} < \infty.$$

Assim podemos encontrar constantes  $\delta$  e  $M'$  tais que para todo  $\delta \leq h \leq 1$

$$\frac{|B(t_0+h) - B(t_0)|}{h} < M'.$$

Pois, o MB é quase certamente contínuo, e limitado em  $[0, 2]$ , assim existe uma constante  $M''$  tal que para todo  $\delta \leq h \leq 1$  temos que

$$\frac{|B(t_0+h) - B(t_0)|}{h} \leq \frac{|B(t_0+h) - B(t_0)|}{\delta} \leq M''.$$

Se tomamos o  $M = \max(M', M'')$  obtemos que

$$\sup_{h \in (0,1]} \frac{|B(t_0+h) - B(t_0)|}{h} \leq M. \quad (3.27)$$



Agora devemos mostrar que este evento tem probabilidade zero para quaisquer  $M$ . Vamos supor (3.27) e  $M$  fixo. Se  $t_0$  está contido no intervalo  $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$  para  $n > 2$  então para todo  $1 \leq j \leq 2^n - k$  e usando a desigualdade triangular temos que

$$\begin{aligned} \left| B\left(\frac{k+j}{2^n}\right) - B\left(\frac{k+j-1}{2^n}\right) \right| &\leq \left| B\left(\frac{k+j}{2^n}\right) - B(t_0) \right| + \left| B\left(\frac{k+j-1}{2^n}\right) - B(t_0) \right| \\ &\leq M \frac{2j+1}{2^n}. \end{aligned}$$

Assim definamos os eventos

$$\Omega_{n,k} := \left\{ \left| B\left(\frac{k+j}{2^n}\right) - B\left(\frac{k+j-1}{2^n}\right) \right| \leq M \frac{2j+1}{2^n} \right\} \quad \text{para } j = 1, 2, 3$$

A partir da independência dos incrementos e a invariância por escala, propriedade (1), e com  $a = \frac{1}{\sqrt{2^n}}$  e para todo  $1 \leq k \leq 2^n - 3$  Segue-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\Omega_{n,k}] &\leq \prod_{j=1}^3 \mathbb{P} \left\{ \left| B\left(\frac{k+j}{2^n}\right) - B\left(\frac{k+j-1}{2^n}\right) \right| \leq M \frac{2j+1}{2^n} \right\} \\ &\leq \mathbb{P} \left[ |B(1)| \leq M \frac{7}{\sqrt{2^n}} \right]^3. \end{aligned}$$

Que é limitada superiormente por  $(7M2^{-\frac{n}{2}})^3$  uma vez que a densidade normal é limitada por  $\frac{1}{2}$  deste modo

$$\mathbb{P} \left( \bigcup_{k=1}^{2^n-3} \Omega_{n,k} \right) \leq 2^n (7M2^{-\frac{n}{2}})^3 = (7M)^3 2^{-\frac{n}{2}}.$$

Que é somável para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Usando o Lema de Borel-Cantelli, Teorema (2.5.1) temos que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left( \exists t_0 \in [0, 1] \quad \text{com} \quad \sup_{h \in (0,1]} \frac{|B(t_0+h) - B(t_0)|}{h} \leq M \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( \bigcup_{k=1}^{2^n-3} \Omega_{n,k} \quad \text{infinitas vezes para } n \in \mathbb{N} \right) = 0. \end{aligned}$$

A desigualdade decorre do fato de que o primeiro evento implica o segundo. Tomando a união contável sobre  $M \in \mathbb{N}$  em intervalos  $[i, i+1]$  com  $i \in \mathbb{N}$  se completa a prova da Proposição.  $\square$

- 14 (**Auto similaridade** ). A auto-similaridade é uma propriedade típica dos fractais. Um objeto *auto-similar* é exatamente ou aproximadamente igual a uma parte, por si só, o conjunto tem a mesma forma que uma ou mais das partes. Muitos objetos do mundo real são estatisticamente auto-similares, tais como plantas e litorais, etc. O conceito de H-*auto-similar* é uma certa invariância pela escala, ou seja, a ideia básica da auto-similaridade corresponde á procura de propriedades estatísticas que

se mantêm inalteradas por agregação temporal, ou seja, mudanças de escala. O parâmetro  $H$  é chamado o índice de Hurst após o hidrólogo Inglês estudando a memória máxima na conexão de desenho para reservatórios de água no Rio Nilo. Definamos que é um processo estocástico *auto-similar* de ordem  $H \in (0, 1)$ .

**Definição 3.3.4. (*Auto-similar*)** Um processo estocástico  $X = (X_t, t \geq 0)$  é auto-similar de ordem  $H \in (0, 1)$  se os processos  $T^H X_t$  e  $X_{Tt}$  tem a mesma distribuição para  $T > 0$ , ou seja, dada uma partição arbitrária de tempos  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T$  temos que

$$(T^H X_{t_1}, \dots, T^H X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{Tt_1}, \dots, X_{Tt_n}) \quad \text{para } T > 0$$

**Proposição 3.3.7.** o movimento browniano,  $B_t$ , é um processo auto-similar de ordem  $H = \frac{1}{2}$ , ou seja

$$T^{\frac{1}{2}} B_t \stackrel{d}{=} B_{Tt}$$

*Demonstração.* Para mostra que os processos  $T^{\frac{1}{2}} B_t$  e  $B_{Tt}$  tem a mesma distribuição, devemos mostrar que ambos tem distribuição Gaussiana com a mesma esperança e variância. Passemos as verificações:

- a) Mostremos que ambos tem distribuição Gaussiana, chamemos de  $Z_t = T^{\frac{1}{2}} B_t$  e  $K_t = B_{Tt}$ , assim, calculemos a distribuição de  $Z_t$

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}[Z_t \leq x] = \mathbb{P}\left[\sqrt{T} B_t \leq x\right] = \mathbb{P}\left[B_t \leq \frac{x}{\sqrt{T}}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y)^2}{2t}} dy = \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t T}} e^{-\frac{(x)^2}{2t T}} dy. \end{aligned}$$

Assim, o processo  $Z_t$  tem distribuição *normal* com esperança,  $\mathbb{E}[Z_t] = 0$  e variância  $V[Z_t] = Tt$ , ou seja  $Z_t \sim \mathbf{N}(0, Tt)$

- b) Calculemos a distribuição de  $K_t$ , já sabemos que o processo  $K_t = B_{Tt}$  tem distribuição *normal* com esperança,  $\mathbb{E}[K_t] = 0$  e variância dada por  $V[K_t] = Tt$ , Logo  $K_t \sim \mathbf{N}(0, Tt)$ . Assim os dois processos tem a mesma distribuição, isto é,

$$T^{\frac{1}{2}} B_t \stackrel{d}{=} B_{Tt} \quad \text{ou} \quad T^{\frac{1}{2}} B_t \sim \mathbf{N}(0, Tt) \sim B_{Tt}$$

Portanto o movimento browniano  $B_t$  é *auto-similar* de ordem  $H = \frac{1}{2}$  □

Note que a propriedade de  $\frac{1}{2}$  *auto-similar* é muito útil para fazer as contas, ainda, se  $H \neq \frac{1}{2}$ , temos as mesmas esperanças, mas não temos, as mesmas variâncias, logo não temos igualdade nas distribuições.

Em uma seção futura, falaremos de novo, devido a que existe um processo estocástico que é formado com esta ideia de *auto-similar*. Esse processo é chamado de

movimento browniano fracionário ou fracional, denotado como  $B_t^H$ , que no caso  $H = \frac{1}{2}$  é o MB, que estamos analisando.

Esta é uma propriedade da escala, que simula um caminho do movimento browniano num intervalo  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , usando a simulação conseguida no intervalo  $[0, 1]$ , re-dimensionando o intervalo de tempo  $[0, 1]$ , pelo fator  $T$  e os respectivos valores de MB,  $B_t$ , e  $T^{\frac{1}{2}}$ .

Valendo-se da auto-similaridade do MB,  $B_t$ , podemos mostrar de forma diferente a propriedade (13), que o MB,  $B_t$  não é diferenciável em nenhuma parte, com probabilidade 1, ou seja,

**Teorema 3.3.4. (Não Diferenciável)** *Seja  $X_t$  um processo com incrementos estacionários e  $H$  auto similar, para alguns  $H \in (0, 1)$ , então para todo  $t_0$  fixo, temos que*

$$\lim_{t \downarrow t_0} \frac{|X_t - X_{t_0}|}{t - t_0} = \infty \quad \text{com probabilidade 1.}$$

Isto é,

$$\mathbb{P} \left[ \lim_{t \downarrow t_0} \frac{|X_t - X_{t_0}|}{t - t_0} = \infty \right] = 1$$

*Demonstração.* Como os incrementos são estacionários podemos assumir sem perda de generalidade, que  $t_0 = 0$ . Seja  $t_n$  uma sequência tal que  $t_n \downarrow 0$  e como  $X_t$  é  $H$ -auto similar, então  $T^H X_0 \stackrel{d}{=} X_0$  para todo  $T > 0$  isso implica que  $X_0 = 0$  quase certamente, e sabemos que  $t_n$  é uma sequência decrescente que converge para 0, definamos o evento seguinte

$$A_n = \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{0 \leq s \leq t_n} \left| \frac{X_s(\omega)}{s} \right| > x \right\}.$$

Assim, temos que  $A_{n+1} \subseteq A_n$  e

$$\mathbb{P} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} [A_n].$$

Portanto

$$\mathbb{P} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq t_n} \left| \frac{X_s}{s} \right| > x \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \sup_{0 \leq s \leq t_n} \left| \frac{X_s}{s} \right| > x \right].$$

Mas como

$$\sup_{0 \leq s \leq t_n} \left| \frac{X_s}{s} \right| \geq \left| \frac{X_{t_n}}{t_n} \right|.$$

Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \sup_{0 \leq s \leq t_n} \left| \frac{X_s}{s} \right| > x \right] \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \mathbb{P} \left[ \left| \frac{X_{t_n}}{t_n} \right| > x \right].$$

Mas por outro lado temos que

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P} [A] \leq \mathbb{P} [B].$$

Então

$$\mathbb{P} \left[ \left| \frac{X_{t_n}}{t_n} \right| > x \right] \leq \mathbb{P} \left[ \sup_{0 \leq s \leq t_n} \left| \frac{X_s}{s} \right| > x \right].$$

E como temos que H-auto similaridade, ou seja,  $(t_n)^H X_1 \stackrel{d}{=} X_{t_n}$ , obtemos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \left| \frac{X_{t_n}}{t_n} \right| > x \right] = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ |(t_n)^{H-1} X_1| > x \right].$$

E usando o fato que  $H \in (0, 1)$  temos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ |(t_n)^{H-1} X_1| > x \right] = 1 \quad \text{para } x > 0.$$

Como  $(t_n)^{H-1} \rightarrow \infty$  pois

$$H - 1 < 0 \quad e \quad t_n \rightarrow 0.$$

Obtemos que

$$\mathbb{P} \left[ \limsup_{n \rightarrow \infty, 0 \leq s \leq t_n} \left| \frac{X_s}{s} \right| > x \right] = 1.$$

E como temos que vale para todo  $x \in \mathbb{R}^+$  Então

$$\mathbb{P} \left[ \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{X_{t_n}}{t_n} \right| = \infty \right] = 1.$$

Sendo mostrado Teorema. □

O Teorema diz que os processos estocásticos H-auto-similares não são diferenciáveis em qualquer ponto. Mas já sabemos que o MB,  $B_t$ , tem incrementos estacionários e é  $\frac{1}{2}$ -auto similar logo pelo Teorema anterior o MB,  $B_t$ , não é diferenciável em nenhuma parte, com probabilidade um.

- 15) **(Conjunto de zeros do MB).** [(KARATZAS; SHREVE, 1991) Cap. 2. Teorema 2.9]

Denotamos o conjunto de todos os tempos que o MB,  $B_t$ , atinge o 0, por

$$\mathcal{Z} := \{t \geq 0 : B_t = 0\}.$$

Mostremos que com probabilidade um, a medida de Lebesgue de  $\mathcal{Z}$  é zero 0.

De fato, seja  $|\mathcal{Z}|$  a medida de Lebesgue. Calculemos a esperança:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\mathcal{Z}|] &= \int_0^\infty \chi_{\{0\}}(B_t) dt = \int_0^\infty ((1 * \mathbb{P}[B_t = 0]) + (0 * \mathbb{P}[B_t \neq 0])) dt \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}[B_t = 0] dt = 0. \end{aligned}$$

Nós sabemos que  $|\mathcal{Z}|$  é não-negativo. Mostremos que uma v.a. não-negativas com esperança 0 são quase certamente zero. Vamos supor que  $X \geq 0$  é uma v.a. com  $\mathbb{E}[X] = 0$  e vamos fixar  $a > 0$ . Então

$$0 = \mathbb{E}[X] = \int_{\inf_{\Omega}} X d\mathbb{P} \geq \int_{X \geq a} X d\mathbb{P} \geq a\mathbb{P}[X \geq a] \geq 0.$$

Assim  $\mathbb{P}[X \geq a] = 0$  para todo  $a > 0$  fazendo  $a \rightarrow 0_+$ , vemos que  $\mathbb{P}[X > 0] = 0$ , e  $X$  é quase certamente zero. portanto  $\mathbb{E}[|\mathcal{Z}|] = 0 \Rightarrow |\mathcal{Z}| = 0$  quase certamente. Assim  $|\mathcal{Z}| = 0$  quase certamente.

Mostremos que  $B_t$  atinge o zero infinidade de vezes em qualquer intervalo a direita da origem.

**Proposição 3.3.8. (*Infinitos Zeros*)** [(KARATZAS; SHREVE, 1991) Cap. 2. Problema 9.5] Fixe  $\epsilon > 0$ . Quase certamente,  $B_t$  tem infinidade de zeros no intervalo  $(0, \epsilon)$ .

*Demonstração.* Fixe  $\epsilon > 0$ . Primeiro, mostramos que deve haver um zero no intervalo  $(0, \epsilon)$ .

Seja  $M_t^+$  e  $M_t^-$  o máximo e mínimo do processo no intervalo  $(0, \epsilon)$ . Pela propriedade (11) temos que  $\mathbb{P}[M_\epsilon^+ > a] = 2\mathbb{P}[B_\epsilon > a]$  e tomando o limite  $a \rightarrow 0_+$ , temos que  $\mathbb{P}[M_\epsilon^+ > 0] = 2\mathbb{P}[B_\epsilon > 0] = 1$  e como  $B_t$  é simétrico, pela propriedade (3). Assim, pela simetria,  $\mathbb{P}[M^-(\epsilon) < 0] = 1$ . Como  $B_t$  é quase certamente contínuo, pelo Teorema do valor intermediário, concluímos que  $B_t = 0$  para algum  $t \in (0, \epsilon)$ . Agora tomemos algum conjunto finito de zeros do MB no intervalo  $(0, \epsilon)$ , digamos,  $\mathcal{K} \subset \mathcal{Z}$ . Seja  $T = \min(t | t \in \mathcal{Z})$  o primeiro elemento de  $\mathcal{Z}$ , já que  $\epsilon$  é arbitrário, podemos dizer que  $B_t$  tem um zero em  $(0, \epsilon)$ , usando o mesmo argumento, podemos afirmar que quase certamente  $B_t$  tem um zero em  $(0, T)$ , mas pela minimalidade  $T$ , este novo zero não esta em  $\mathcal{Z}$ , portanto, não existe um conjunto finito contendo todos os tempos  $B_t$  que atinge o zero, logo  $\mathcal{Z}$  é infinito.  $\square$

Outra forma de mostrar que deve haver infinitos zeros no intervalo  $(0, \epsilon)$ , é a seguinte afirmamos que

$$\mathbb{P}[B_t = 0 \text{ para algum } t \in [t_1, t_2]] = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2 - t_1}} \right)$$

De fato, usando a propriedade de translação e o princípio da reflexão, para qualquer  $u > 0$ , temos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[B_t = 0 \text{ para algum } t \in [t_1, t_2] | B_{t_1} = u] \\ &= \mathbb{P}[B_t \leq -u \text{ para algum } t \in [0, t_2 - t_1]] \\ &= \mathbb{P}[B_t \geq u \text{ para algum } t \in [0, t_2 - t_1]] \\ &= 2\mathbb{P}[B_{t_2 - t_1} \geq u]. \end{aligned}$$

Por simetria temos que a probabilidade é a mesma para o caso  $u > 0$ , assim

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}[B_t = 0 \text{ para algum } t \in [t_1, t_2]] = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbb{P}[B_t = 0 \text{ para algum } t \in [t_1, t_2] | B_{t_1} = u]) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{u^2}{2t_1}} \right) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 2 (\mathbb{P}[B_{t_2-t_1} \geq 0]) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{u^2}{2t_1}} \right) du \\
&= 4 \int_0^{\infty} (\mathbb{P}[B_{t_2-t_1} \geq 0]) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{u^2}{2t_1}} \right) du \\
&= 4 \int_0^{\infty} \left( \int_u^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} e^{-\frac{v^2}{2(t_2-t_1)}} dv \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{u^2}{2t_1}} \right) du \\
&= 4 \int_0^{\infty} \int_u^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} e^{-\frac{v^2}{2(t_2-t_1)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{u^2}{2t_1}} dv du.
\end{aligned}$$

Se definimos que  $x = \frac{u}{\sqrt{t_1}}$  e  $y = \frac{v}{\sqrt{t_2-t_1}}$  obtemos que  $dx = \frac{du}{\sqrt{t_1}}$  e  $dy = \frac{dv}{\sqrt{t_2-t_1}}$ , assim

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbb{P}[B_t = 0 \text{ para algum } t \in [t_1, t_2] | B_{t_1} = u]) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{u^2}{2t_1}} \right) du = \\
&= 4 \int_0^{\infty} \int_{\frac{x\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2-t_1}}}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dy dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\arctan(\frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2-t_1}})}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta \\
&= 4 \left( \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2-t_1}}\right) \right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \\
&= \left( 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2-t_1}} \right).
\end{aligned}$$

Portanto provamos nossa afirmação

$$\mathbb{P}[B_t = 0 \text{ para algum } t \in [t_1, t_2]] = \left( 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2-t_1}} \right).$$

E agora notemos que se  $t_1 = 0$  e  $t_2 = \epsilon$ , temos que

$$\mathbb{P}[B_t = 0 \text{ para algum } t \in [0, \epsilon]] = 1.$$

Se chamamos de  $Z[0, \epsilon]$  o evento de ter um zero em  $(0, \epsilon)$  para  $\epsilon > 0$ , então para infinitos zeros temos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Z[0, \frac{\epsilon}{n}]$$

é interseção de uma coleção enumerável de eventos com probabilidade 1, ainda tem probabilidade 1.

**Teorema 3.3.5.** *Quase certamente, o conjunto  $\mathcal{Z}$  é um conjunto perfeito, isto é, é um conjunto fechado, sem pontos isolados,*

*Demonstração.* Como  $B_t$  é contínuo, então  $\mathcal{Z} = B_t^{-1}(\{0\})$  deve ser fechado, pois é a imagem inversa do conjunto fechado  $\{0\}$ .

Considere o tempo  $\tau_q = \inf \{t \geq q \mid B_t = 0\}$ , onde  $q \in \mathbb{Q}$ . Isto é claramente um tempo de parada, e é quase certamente finito porque  $B_t$  quase certamente cruza o zero para um  $t$  qualquer, além disso, o  $\inf$  é o mínimo porque o conjunto  $\mathcal{Z}$  é quase certamente fechado. Aplicando a propriedade forte de Markov em  $\tau_q$ , temos que  $B_{t+\tau_q} - B_{\tau_q} = B_{t+\tau_q}$  é MB. Já sabemos que MB cruza o zero em cada pequeno intervalo a direita da origem, logo,  $\tau_q$  não é isolado a partir da direita em  $\mathcal{Z}$ .

Agora suponha que temos algum  $z \in \mathcal{Z}$  que não está em  $\{\tau_q \mid q \in \mathbb{Q}\}$  e tome alguma sequência,  $q_n$ , de números racionais que converge para  $z$ . Para cada  $q_n$ , deve existir um  $t_n \in \mathcal{Z}$  tal que  $q_n \leq t_n < z$  já que  $z \neq \tau_{q_n}$ . Porque  $q_n \rightarrow z$ ,  $t_n \rightarrow z$ , logo  $z$  não é isolado a partir da esquerda de  $\mathcal{Z}$ . Portanto,  $\mathcal{Z}$  não tem pontos isolados.  $\square$

**Teorema 3.3.6.** *O conjunto  $\mathcal{Z}$  é não numerável.*

*Demonstração.* Já sabemos que  $\mathcal{Z}$  é perfeito, o conjunto  $\mathcal{Z}$  não pode ser finito, pois, ele consiste somente de pontos de acumulação. Se  $\mathcal{Z}$  é enumerável, então podemos escrevê-lo como  $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2, \dots\}$ . Então vamos considerar o intervalo,

$$I_1 = (z_1 - 1, z_1 + 1).$$

Esse intervalo é claramente uma vizinhança em torno  $z_1$ . Então, já que  $z_1$  é um ponto de acumulação,  $I_1$  tem infinitos elementos de  $\mathcal{Z}$ .

Agora, pegue um elemento de  $I_1$ , por exemplo,  $z_2$ , e seja  $I_2$  tal que  $\bar{I}_2 \subset I_1$  e  $z_1 \notin \bar{I}_2$ . Então, já que  $z_2$  é um ponto de acumulação em  $\mathcal{Z}$ ,  $I_2$  tem infinitos elementos de  $\mathcal{Z}$ , de novo, tome um elemento de  $I_1$ , por exemplo,  $z_3$ , e seja  $I_3$  tal que  $\bar{I}_3 \subset I_2$  e  $z_1, z_2 \notin \bar{I}_3$ . E assim por diante. Então, teremos  $I_n$  e  $z_n$  com  $\bar{I}_{n+1} \subset I_n$ , e  $z_j \notin I_n$  para todo  $0 < j < n$ , assim temos  $z_n \in I_n$ . Então, considere a intersecção do fecho dos intervalos com  $\mathcal{Z}$ , ou seja

$$A = \bigcap_{i=1}^n \bar{I}_i \cap \mathcal{Z}.$$

Cada conjunto  $\bar{I}_i \cap \mathcal{Z}$  é fechado e limitado, portanto compacto com  $\bar{I}_{n+1} \cap \mathcal{Z} \subset \bar{I}_n \cap \mathcal{Z}$ , assim  $A$  é não vazio. Mas,  $z_1 \notin \bar{I}_2$  e da mesma forma para  $z_2, z_3, \dots$ , então  $\mathcal{Z}$  deve ter alguns elementos que não figuram na lista  $z_1, z_2, z_3, \dots$ , portanto  $\mathcal{Z}$  é não numerável  $\square$

É um fato da análise de que os conjuntos perfeitos são não numeráveis, por exemplo o conjunto de Cantor. Isto mostra que, apesar que  $\mathcal{Z}$  tem medida nula, ainda é muito grande em um sentido.

- 16) **(Não Variação limitada e variação quadrática limitada do MB).** [(MÖRTERS; PERES, 2010) Cap. 1 Teorema 1.35]

Recordar a definição da variação de uma função. Seja

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

Uma partição do intervalo  $[a, b]$  e defina a norma da partição

$$\Delta t = \max \{|t_{i+1} - t_i| : i = 0, \dots, n-1\}.$$

A variação de uma função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é o número

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|. \quad (3.28)$$

Quando este número é finito (3.28), dizemos que a função tem variação finita, neste intervalo. Analogamente, a variação é quadrática de uma função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|^2.$$

Então, provemos que sobre um intervalo de tempo limitado  $[a, b]$  quase todas as trajetórias do MB tem variação ilimitada, isto é,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| = \infty \quad \text{quase certamente}$$

Esta propriedade é particularmente importante, uma vez que resulta na impossibilidade de considera as trajetórias brownianas como funções integradoras no sentido de Riemann-Stieltjes. Além disso, a variação quadrática do movimento browniano em,  $[a, b]$  é finita, de fato, é o comprimento do intervalo envolvido. Isto permitira definir uma noção de integral sobre o movimento browniano.

**Proposição 3.3.9. ((Variação quadrática limitada).** *A variação quadrática de uma trajetória do MB no intervalo  $[a, b]$  é o comprimento do intervalo, isto é,*

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \sum_{i=1}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2 = b - a \quad \text{no sentido } L^2(\Omega).$$

*Demonstração.* Seja  $\{\mathbf{p}_n : n \geq 1\}$  uma sequência de partições finitas do intervalo  $[a, b]$ . Vamos a definir a v.a.  $Y_{\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{p}} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2$  e denotemos por  $\Delta t_i$  o incremento  $t_{i+1} - t_i$  e seja  $\Delta B_i$  a diferença  $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ . assim

$$\mathbb{E}[Y_{\mathbf{p}}^2] = \mathbb{E} \left[ \sum_i \Delta B_i^2 \sum_j \Delta B_j^2 \right] = \sum_i \sum_j \mathbb{E} [\Delta B_i^2 \Delta B_j^2]$$



Como estamos com variáveis Gaussianas, temos que

$$\mathbb{E} [\Delta B_i^2 \Delta B_j^2] = \begin{cases} \Delta t_i \Delta t_j & \text{se } i \neq j \\ 3\Delta t_i^2 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left( \sum_i (\Delta B_i)^2 - (b-a) \right)^2 \right] = \\ & = \mathbb{E} \left[ \sum_{i,j} (\Delta B_i)^2 (\Delta B_j)^2 \right] - 2(b-a) \mathbb{E} [(\Delta B_i)^2] + (b-a)^2 \\ & = \sum_i \mathbb{E} (\Delta B_i)^4 + \sum_{i \neq j} \mathbb{E} (\Delta B_i)^2 \mathbb{E} (\Delta B_j)^2 - 2(b-a) \sum_i (\Delta t_i) + (b-a)^2 \\ & = \sum_i 3(\Delta t_i)^2 + \sum_{i \neq j} (\Delta t_i)(\Delta t_j) - (b-a)^2 \\ & = \sum_i 2(\Delta t_i)^2 + \left( \sum_i (\Delta t_i) \right)^2 - (b-a)^2 \\ & = \sum_i 2(\Delta t_i)^2 \\ & \leq 2(b-a) \max_{0 \leq i < n} (\Delta t_i) \rightarrow 0 \quad \text{quando } \mathbf{p} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Lembremos dos resultados do Capítulo 1, seção tipos de convergência, sabemos que convergência em média quadrática, ou seja,  $L^2(\Omega)$ , implica em convergência em probabilidade e convergência em probabilidade implica que existe uma subsequência convergente quase certamente, ou seja, temos que toda sequência convergente no sentido  $L^2(\Omega)$ , tem uma subsequência convergente quase certamente. Portanto, existe uma subsequência de partições  $\{\mathbf{p}_{n_k} : k \geq 1\}$  do intervalo  $[a, b]$  tal que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \sum_{i=1}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2 = b-a \quad \text{quase certamente.}$$

**Proposição 3.3.10. (*Variação não limitada*).** *A variação de uma trajetória do movimento browniano sobre o intervalo  $[a, b]$  é infinita quase certamente, isto é,*

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \sum_{i=1}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| = \infty \quad \text{quase certamente.}$$

*Demonstração.* Para cada  $n$  natural, seja  $\mathbf{p}_n$  a partição uniforme do intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos, ou seja, cada incremento  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  tem comprimento  $\frac{(b-a)}{n}$ . Então nós temos a estimativa

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta B_i|^2 \leq \left( \max_{0 \leq i < n} |\Delta B_i| \right) \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta B_i| \quad (3.29)$$

Seja  $\{\mathbf{p}_{n_k} : k \geq 1\}$  uma subsequência de partições uniformes de tal modo que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} |\Delta B_i|^2 = b - a \quad \text{quase certamente}$$

Por outro lado, como trajetórias do movimento browniano são contínuas quase certamente, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \max_{0 \leq i < n_k} |\Delta B_i| \right) = 0 \quad \text{quase certamente}$$

Assim, da análise da expressão (3.29) temos que se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta B_i| \right) < \infty.$$

Fosse finita, teríamos uma contradição, logo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta B_i| \right) = \infty.$$

Assim obtém que, em relação à subsequência de partições, que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} |\Delta B_i| = \infty \quad \text{quase certamente}$$

Daí segue-se que o limite superior é infinito quase certamente. □

## 4 Movimento Browniano e alguns processos relacionados

Neste capítulo vamos investigar o caráter "*universal*" que o MB tem dentro dos processos estocásticos. Mais precisamente, vamos mostrar que o MB é um processo Markoviano, uma martingal e um processo de Lévy. Explorando o fato de que o MB é um processo de Markov, demostramos as propriedades de recorrência, transcendência de suas trajetórias. Outro objetivo é estudar os diferentes processos que são formados a partir do MB.

### 4.1 Movimento browniano é um processo de Markov

Sabemos que os processos de Markov representam uma das mais importantes classes de processos estocásticos, não só por sua gama de aplicações, mas também pela interação com outras áreas da matemática, por exemplo, com análise funcional, teoria espectral, teoria de operadores. De modo mais geral, podemos dizer que o processo de Markov está relacionado a uma função de transição homogênea no tempo, que dá origem a um semigrupo de contração por intermédio da propriedade de Chapman-kolmogorov. O semigrupo por sua vez está estreitamente relacionado, com um gerador, que é obtido quando tomamos a derivada á direita do semigrupo no ponto  $t = 0$ . O processo inverso também é válido, ou seja, dado um gerador com boas propriedades, podemos obter, por meio do Teorema Hille-Yosida (([ETHIER; KURTZ, 1986](#)) Cap. 1. seção. 2), um semigrupo de contração que da origem a uma função de transição e este a sua vez retornará a um processo de Markov. Para uma leitura mas profunda das relações entre estes conceitos ver ([KOLOKOL'COV, 2011](#)), ([ETHIER; KURTZ, 1986](#)) . Nosso objetivo é mostrar a relação com o MB, sua função de transição e o operador laplaciano. Mas antes temos que definir o que é uma função de transição.

De uma forma intuitiva, os processos de Markov, são modelos em que, assumindo que é conhecido o estado atual do sistema, os estados anteriores não têm influência sobre os estados futuros do sistema. Esta condição é chamada de propriedade de Markov, ou seja, dado os estados no passado

$$X_0, X_1, X_2, \dots, X_{n-1},$$

Presente  $X_n$  e o futuro  $X_{n+1}$  temos a igualdade

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n]. \quad (4.1)$$

Assim a probabilidade do evento futuro  $X_{n+1} = x_{n+1}$  depende apenas do evento presente  $X_n = x_n$ .

Para uma definição rigorosa de processos de Markov, precisamos de alguns conceitos.

Uma filtração no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ , é uma família de  $\sigma$ -álgebra,  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in I}$ , tal que  $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t+s} \subset \mathfrak{F}$  para todo  $t, s \in [0, \infty)$ . Se  $X_t$  é um processo estocástico, podemos construir facilmente uma filtração, considerando a  $\sigma$ -álgebra,  $\mathfrak{F}_t^X$ , gerada pelas v.a.  $X_s$  para  $0 \leq s \leq t$  em  $I$ , ou seja,

$$\mathfrak{F}_t^X := \sigma \{X_s; s \leq t\}.$$

Devemos lembrar que a  $\sigma$ -álgebra gerada por uma v.a.  $Y$  é  $\sigma(Y) = \{Y^{-1}(\Gamma); \Gamma \in \mathcal{B}\}$ . Chamamos a filtração  $\{\mathfrak{F}_t^X \mid t \in I\}$  de filtração natural do processo. Podemos definir a *filtração browniana* como

**Definição 4.1.1. ((Filtração Browniana)).** *Seja  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade, no qual está definido um movimento browniano  $B_t, t \geq 0$ . Uma filtração Browniana é uma filtração  $\mathfrak{F}_t, t \geq 0$ , em  $(\mathfrak{F})$  tal que:*

1. *A informação disponível no intervalo de tempo  $[0, s]$  é suficiente para avaliar  $B_s$ . Ou seja, o browniano é um processo adaptado.*
2. *Para  $0 \leq t < u$ ,  $B_u - B_t$  é independente de  $\mathfrak{F}_t$  (representa a independência dos incrementos futuros).*

**Definição 4.1.2. ((Processo de Markov)).**

*Seja  $(X_t)_{t \geq 0}$  um processo estocástico definido em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  e  $\mathfrak{F}_t^X = \sigma \{X_s; s \leq t\}$  sua filtração natural.  $X$  é um processo de Markov se:*

$$\mathbb{P}[X_{t+s} \in \Gamma \mid \mathfrak{F}_t^X] = \mathbb{P}[X_{t+s} \in \Gamma \mid X_t] \quad \text{para todo } s, t \geq 0 \text{ e } \Gamma \in \mathcal{B}. \quad (4.2)$$

Se  $\mathcal{G}_t$  é uma filtração com  $\mathfrak{F}_t^X \subset \mathcal{G}_t; t \geq 0$ , então  $X$  é um processo de Markov com respeito a  $\mathcal{G}_t$  se vale (4.2), substituindo  $\mathfrak{F}_t^X$  por  $\mathcal{G}_t$ .

Usando a esperança condicional para  $f \in \mathcal{B}(E)$  e se  $f$  é limitada e mensurável, a igualdade dada em (4.2), resulta em

$$\mathbb{E}[f(X(t+s)) \mid \mathfrak{F}_t^X] = \mathbb{E}[f(X(t+s)) \mid X_t] \quad \forall s, t \geq 0 \text{ e } f \in \mathcal{B}(E). \quad (4.3)$$

Sabemos que se  $X$  é um processo de Markov com respeito a filtração  $\{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}$  e  $\mathfrak{F}_t^X \subset \mathcal{G}_t$ , para todo  $t \geq 0$ , então  $X$  é um processo de Markov com respeito á filtração natural  $\{\mathfrak{F}_t^X\}_{t \geq 0}$ , portanto usando as propriedades da esperança condicional temos que

$$\mathbb{E}[X_{t+s} \mid \mathfrak{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{t+s} \mid \mathcal{G}_t] \mid \mathfrak{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{t+s} \mid X_t] \mid \mathfrak{F}_t] = \mathbb{E}[X_{t+s} \mid X_t].$$

Onde a segunda igualdade usamos que  $X$  é  $\mathcal{G}_t$ -Markov.

**Definição 4.1.3.** (*(Função de transição)* ([ETHIER; KURTZ, 1986](#)) Cap. 4.). A função  $p : [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de transição homogênea no tempo se satisfaz:

- i)  $p(t, x, \cdot)$  é uma medida de probabilidade em  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  para quaisquer  $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$
- ii)  $p(0, x, \cdot) = \delta_x$ , a massa unitária em  $x \in \mathbb{R}$
- iii)  $p(\cdot, \cdot, A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . para qualquer  $A \in \mathcal{B}$ .
- iv) Vale a propriedade de Chapman-Kolmogorov

$$p(s+t, x, \Gamma) = \int p(s, y, \Gamma) p(t, x, dy) \quad s, t \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad (4.4)$$

Podemos associar uma função de transição  $p$  com a probabilidade, se definirmos

$$p(s, x, \Gamma) := \mathbb{P}_x(X_s \in \Gamma) \quad s \geq 0, \quad \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ e } x \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

Assim usando a definição (4.2) e (4.5), temos a equivalência

$$p(s, x, \Gamma) := \mathbb{P}[X_{t+s} \in \Gamma \mid \mathfrak{F}_t^X] \quad s, t \geq 0, \quad \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad (4.6)$$

Então para  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  temos:

$$\int f(y) p(s, X_t, dy) = \mathbb{E}[f(X(t+s)) \mid \mathfrak{F}_t^X]. \quad (4.7)$$

Mostremos que o MB,  $B_t$ , é um processo de Markov usando fortemente a igualdade (4.3), ou seja, com relação a sua filtração natural. Isto é fácil de ver usando a função geradora de momentos, já que a distribuição condicionada de  $B_{t+s}$  dada  $\mathfrak{F}_t$  é a mesma dado  $B_t$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{uB_{t+s}} \mid \mathfrak{F}_t] &= \mathbb{E}[e^{uB_{t+s}+uB_t-uB_t} \mid \mathfrak{F}_t] = e^{uB_t} \mathbb{E}[e^{uB_{t+s}-uB_t} \mid \mathfrak{F}_t] = e^{uB_t} \mathbb{E}[e^{uB_{t+s}-uB_t}] \\ &= e^{uB_t} \mathbb{E}[e^{uB_{t+s}-uB_t} \mid B_t] = \mathbb{E}[e^{uB_{t+s}} \mid B_t]. \end{aligned}$$

Na terceira igualdade  $e^{u[B_{t+s}-B_t]}$  é independente de  $\mathfrak{F}_t$  e na quarta igualdade  $e^{u[B_{t+s}-B_t]}$  é independente de  $B_t$ . Outra forma de provar que o MB é um processo de Markov, é usando a função de transição do MB. De fato, note que, para uma partição arbitrária  $0 \leq t_1 < \dots < t_N$  Sabemos que  $B_{t_N} - B_{t_{N-1}}$  é independente de  $B_{t_1}, \dots, B_{t_{N-1}}$ , Assim

temos que:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}[B_{t_N} = x_N \mid B_{t_{N-1}} = x_{N-1}, \dots, B_{t_1} = x_1] = \\
&= \mathbb{P}[B_{t_N} - B_{t_{N-1}} = x_N - x_{N-1} \mid B_{t_{N-1}} = x_{N-1}, \dots, B_{t_1} = x_1] \\
&= \mathbb{P}[B_{t_N} - B_{t_{N-1}} = x_N - x_{N-1}] \\
&= \mathbb{P}[B_{t_N} - B_{t_{N-1}} = x_N - x_{N-1} \mid B_{t_{N-1}} = x_{N-1}] \\
&= \mathbb{P}[B_{t_N} = x_N \mid B_{t_{N-1}} = x_{N-1}].
\end{aligned}$$

Que é exatamente o que temos na expressão (4.1). Onde na terceira e quarta igualdade usamos a independência. Observe-se que esse argumento para  $u > t$  mostra que as probabilidades de transição do MB pode ser dadas por

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[B_u = y \mid B_t = x] &= \mathbb{P}[B_u - B_t = y - x] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(u-t)}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2(u-t)}\right\} \\
&=: p(y-x, u-t, \Gamma).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Onde temos que

$$p(x, t, \Gamma) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} \quad t > 0.$$

A expressão (4.8) nos dá um exemplo da importante relação entre os processos estocásticos e equações diferenciais parciais (EDP). Para um  $(y, u)$  fixado, temos que

$v(x, t) := p(y-x, u-t, \Gamma)$  como função de  $(x, t)$  e é solução de

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0.$$

Formalmente temos a seguinte situação:

estamos interessados na função  $u(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  satisfazendo a EDP

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u \\ u(0, x) = f(x). \end{cases}$$

Onde  $f$  é uma função fixada, vamos a solução dessa equação em um objeto probabilístico.

Usaremos a expressão (4.7) como uma definição, ou seja,

**Definição 4.1.4.** O núcleo do calor  $p : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  é definido pela seguinte fórmula: para qualquer função mensurável e integrável  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}_x[f(B_t)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) p(t, x, y) dy.$$

Onde a função  $p(t, x, \cdot)$  é a probabilidade de transição associada do MB,  $B_t$  com

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2t} |x-y|^2\right). \tag{4.9}$$

A seguinte proposição irá mostrar como a relação entre a função de transição e a equação do calor

**Proposição 4.1.1.** *Seja  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  de tal modo que para todo  $c > 0$  e*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| e^{-c|x|^2} dx.$$

*Existe, então a função  $u(t, x) = \mathbb{E}_x[f(B_t)]$  é solução de (1) em  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ .*

*Demonstração.* É claro que, o estado inicial é satisfeito, usando a definição (4.1.4), temos que

$$u(t, x) = \mathbb{E}_x[f(B_t)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) p(t, x, y) dy.$$

Se temos  $p(t, x, y) = p(t, 0, y - x)$ , e seja  $z = y - x$  com  $z = (z_1, \dots, z_d)$ , então, usando expressão (4.9), temos que

$$\frac{\partial p(t, 0, z)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \left( \frac{\|z\|^2}{2t^2} - \frac{d}{2t} \right) \exp\left(-\frac{1}{2t} \|z\|^2\right) \quad (4.10)$$

E

$$\Delta p(t, 0, z) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \left( \frac{\|z\|^2}{t^2} - \frac{d}{t} \right) \exp\left(-\frac{1}{2t} \|z\|^2\right) \quad (4.11)$$

Assim temos a igualdade entre (4.10) e (4.11), logo  $p(t, x, y)$  é solução de

$$\frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta p(t, x, y)$$

Como  $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| e^{-c|x|^2} dx$  existe, ou seja, é integrável, obtemos que  $u$  é solução de (1), ou seja

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}$$

□

#### 4.1.1 Transcendência e recorrência do movimento browniano

Estamos prontos para discutir a propriedade de **transcendência e recorrência** do movimento browniano, como mencionamos na seção (3.2), quando definimos o MB  $d$ -dimensional,  $\mathbf{B}_t$ . Nós começamos em um ponto  $x$  que está fora do centro entre dois círculos, ou seja

$$\mathbf{x} \in B = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid R_1 < \|x\| < R_2 \}.$$

A notação  $\mathbb{P}^{\mathbf{x}}$  e  $\mathbb{E}^{\mathbf{x}}$  significa probabilidade e esperança condicional em  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{x}$ . Tomemos o tempo de parada  $T$  como sendo o primeiro tempo que o processo atende a fronteira, ou

seja,  $\mathbf{X}_T \in \partial B$  dado que  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{x} \in B$ . Agora queremos saber: Qual é a probabilidade de que  $\|\mathbf{X}_T\| = R_2$ , ou seja, queremos saber

$$f(\mathbf{x}) = \mathbb{P}^{\mathbf{x}}(\|\mathbf{X}_T\| = R_2).$$

Mas isto é o mesmo que

$$f(\mathbf{x}) = \mathbb{E}^{\mathbf{x}}(g(\mathbf{X}_T)).$$

Onde  $g$  é dada por

$$g(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{y}\| = R_2 \\ 0 & \text{si } \|\mathbf{y}\| = R_1 \end{cases}$$

Sabemos que  $f(\mathbf{x})$  é a solução da equação do calor, pela Proposição (4.1.1)

$$\Delta f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0.$$

Em  $B$  com condições de contorno

$$f(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \|\mathbf{y}\| = R_2 \\ 0 & \text{se } \|\mathbf{y}\| = R_1 \end{cases}$$

Uma vez que as condições de contorno sobre a EDP são radialmente simétricas então a solução para a EDP deve ser a solução radialmente simétrica. Sabemos que a solução será uma função de  $\|\mathbf{x}\|$ , assim, seja

$$z = \|\mathbf{x}\|^2 = \sum x_i^2.$$

Portanto

$$f(\mathbf{x}) = \phi(z) = \phi\left(\sum x_i^2\right). \quad (4.12)$$

Diferenciando com respeito à  $i$ -ésima coordenada temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2x_i \phi'(z).$$

E diferenciando de novo com respeito à  $i$ -ésima coordenada temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 2\phi'(z) + 2x_i^2 \phi''(z).$$

Soma sobre todos  $i = 1, 2, \dots, d$  temos que

$$\Delta f(\mathbf{x}) = 2d\phi'(z) + 4z\phi''(z) = 0 \quad (4.13)$$

Assim temos uma EDO de segundo ordem, se chamamos  $\psi(z) = \phi'(z)$ , a equação (4.13) se torna

$$2d\psi(z) + 4z\psi'(z) = 0. \quad (4.14)$$



Resolvendo (4.14) por separação de variáveis, temos que  $4z \frac{d\psi(z)}{dz} = -2d\psi(z)$  o que implica que  $\frac{d\psi}{\psi(z)} = -\frac{d}{2} \frac{dz}{z}$  integrando ambos os lados para obter

$$\ln \psi(z) = -\frac{d}{2} \ln z + C_0.$$

Tomando *exponencial* em ambos lados temos que

$$\psi(z) = \phi(z)' = K_0 z^{-\frac{d}{2}} \quad \text{com } K_0 = e^{C_0} \quad (4.15)$$

Mas na equação (4.12) definimos  $f = \phi$ , assim integrando (4.15) para obter a  $f$  temos

$$f(\mathbf{x}) = \phi(z) = K_0 \frac{2z^{\frac{(2-d)}{2}}}{2-d} + C. \quad (4.16)$$

Se definimos  $K := \frac{2K_0}{2-d}$  e usamos que  $z = \|\mathbf{x}\|^2$  a expressão (4.16) se torna

$$f(\mathbf{x}) = K \|\mathbf{x}\|^{2-d} + C. \quad (4.17)$$

Agora vamos colocar nas condições de fronteira. Primeiro  $f(\mathbf{x}) = 0$  se  $\|\mathbf{x}\| = R_1$ , substituindo em (4.17) temos  $0 = K R_1^{2-d} + C$ , ou seja, o valor de  $C$  é  $C = -K R_1^{2-d}$ , e usando a segunda condição de fronteira,  $f(\mathbf{x}) = 1$  se  $\|\mathbf{x}\| = R_2$  e o valor da  $C$  em (4.16), obtemos que

$$1 = K R_2^{2-d} - K R_1^{2-d}.$$

Ou seja, o valor de  $K$  é

$$K = \frac{1}{R_2^{2-d} - R_1^{2-d}}.$$

Portanto a solução de (4.17), substituindo  $C$  e  $K$  para  $d \neq 2$  é

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x}\|^{2-d} - R_1^{2-d}}{R_2^{2-d} - R_1^{2-d}}. \quad (4.18)$$

Se  $d = 2$  em (4.18) temos uma indeterminação  $\frac{0}{0}$ , então podemos utilizar regra de l'Hopital com limite  $d \rightarrow 2$  e como os termos da equação (4.18) tem expoente  $2 - d$  os podemos chamar de  $W^{2-d}$  e diferenciando com respeito a  $d$ , temos para cada termo que

$$(W^{2-d})' = (-\ln W) \underbrace{(W^{2-d})}_{\rightarrow 1}.$$

Assim equação (4.18) para  $d = 2$  é

$$f(\mathbf{x}) = \frac{(-\ln \|\mathbf{x}\|) + (\ln R_1)}{-\ln R_2 + \ln R_1}. \quad (4.19)$$

Lembre-se que  $f(\mathbf{x})$  é a probabilidade que  $\|\mathbf{x}\|$  alcançará  $R_2$  antes de atingir  $R_1$ . Assim, queremos tomar o limite quando  $R_1 \rightarrow 0$  e  $R_2 \rightarrow \infty$ .

a) Suponha que  $d = 3$  na equação (4.18) e  $(R_2 \rightarrow \infty)$ , então a equação (4.18) se torna

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} \in (0, 1).$$

Assim  $\frac{1}{R_2} \rightarrow 0$  quando  $(R_2 \rightarrow \infty)$ , portanto  $f(\mathbf{x})$  torna-se:

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = \frac{\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{1}{R_1}}{-\frac{1}{R_1}} = 1 - \frac{R_1}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Sabemos que  $R_1 < \|\mathbf{x}\| < R_2$  o que implica que  $0 < \frac{R_1}{\|\mathbf{x}\|} < 1$ . Isto significa que a partícula tem a chance de ir para o infinito. Então, eventualmente, ela vai com probabilidade um. (Se ela atinge o círculo pequeno então a partícula não está realmente parada. Ela continua e tem a mesma chance de ir para o infinito antes de atingir um menor círculo em torno de 0). Então, o MB de dimensão 3 é *transiente*.

Da mesma forma acontece para qualquer  $d > 2$ , ou seja,

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = 1 - \frac{R_1}{\|\mathbf{x}\|^{d-2}}.$$

Assim, o MB é *transiente* para todo  $d > 2$ .

Agora, suponha que  $d = 2$  e usando (4.19) e fazendo o limite  $R_2 \rightarrow \infty$  temos que  $\ln R_2 \rightarrow \infty$  portanto  $\lim_{R_2 \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = 0$ .

Logo a partícula nunca vai até o infinito com probabilidade. Ele vai manter retornando para o círculo de raio  $R_1$  sobre a origem não importa quão pequena seja  $R_1 > 0$ . E também é válido para qualquer ponto no plano. O MB atingirá qualquer círculo em torno de qualquer ponto infinitas vezes com probabilidade um. Então, o MB em  $\mathbb{R}^2$  é chamado *recorrente* em uma vizinhança.

b) Suponha  $d > 2$  e  $(R_1 \rightarrow 0)$ , então  $R_1^{2-d} = \frac{1}{R_1^{d-2}} \rightarrow \infty$  Logo, usando (4.18) obtemos que  $f(\mathbf{x}) \rightarrow 1$ , quando  $(R_1 \rightarrow 0)$  e de forma similar, usando (4.19) para  $d = 2$  e  $(R_1 \rightarrow 0)$  temos que  $\ln R_1 \rightarrow -\infty$  então de novo  $f(\mathbf{x}) \rightarrow 1$ . Isto significa que, para  $d \geq 2$  a probabilidade é zero de que a partícula nunca vai retornar para a origem. Então, quando  $d = 2$  o MB não é *recorrente*, só é *recorrente* em uma vizinhança.

Finalmente suponha  $d = 1$  e  $(R_1 \rightarrow 0)$ , assim temos que

$$\lim_{R_1 \rightarrow 0} f(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x}\|}{R_2} < 1.$$

O que significa que a partícula tem uma chance de ir para a origem e portanto eventualmente vai com probabilidade um. Então ele irá continuar voltando porque não pode evitar eventos de probabilidade um. E isso é verdade para todos os pontos na reta. MB na reta vai para cada ponto da reta infinitas vezes, com probabilidade um. Assim, o MB na reta é *recorrente*.

## 4.2 Movimento browniano é uma martingal

Nesta seção vamos a falar de martingal e sua relação com MB. De forma intuitiva uma **martingal**, a tempo discreto é um processo estocástico  $\{X_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$  que cumpre a seguinte condição

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] = x_n.$$

Ou seja, o valor esperado do processo no tempo futuro  $n + 1$  é o valor de processo no último momento observado  $x_n$ , isto é, uma lei do movimento aleatório é balanceada ou simétrica, pois, em média, o sistema não muda do último momento observado. Estes processos também são referidos como processos de (fair play) o jogos justos. Para mas detalhes sobre as martingais, ver (LAWLER, 2006), (KARATZAS; SHREVE, 1991) e (BILLINGSLEY, 2012).

Mais formalmente, temos a seguinte definição.

**Definição 4.2.1. (*martingal*)** Fixada uma filtração  $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ , um processo estocástico  $(X(t))_{t \geq 0}$ , com valores em  $\mathbb{R}$  é uma martingal com relação a uma filtração  $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ , se  $X_t$  é adaptado, integrável, ou seja,  $\mathbb{E}[X(t)] < \infty$  e para  $0 < s < t$  temos que

$$\mathbb{E}[X(t+s) \mid \mathfrak{F}_t] = X(t) \quad \text{quase certamente.}$$

Usando a filtração natural do MB, definição (4.1.1) podemos mostrar que o MB,  $B_t$ , e os processos

$$B_t^2 - t \quad \text{e} \quad e^{uB_t - \frac{u^2}{2}t}.$$

São martingais. Seja  $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$  a filtração natural do MB, assim temos que  $B_t$  é adaptado, mostremos que  $B_t$  é integrável. Sabemos que o MB,  $B_t \sim N(0, t)$  e calculemos  $\mathbb{E}[|B_t|]$

$$\mathbb{E}[|B_t|] = \int_{\mathbb{R}} \frac{|z|}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{z^2}{2t}} dz = 2 \int_0^\infty \frac{z}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{z^2}{2t}} dz = -\sqrt{\frac{2t}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2t}} \Big|_0^\infty = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \infty.$$

Assim  $B_t$  é integrável com  $\mathbb{E}[B_t] = 0$ . E para  $s < t$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t \mid \mathfrak{F}_s] &= \mathbb{E}[B_s + (B_t - B_s) \mid \mathfrak{F}_s] = \mathbb{E}[B_t \mid \mathfrak{F}_s] + \mathbb{E}[(B_t - B_s) \mid \mathfrak{F}_s] \\ &= B_s + \mathbb{E}[B_t - B_s] = B_s. \end{aligned}$$

Na terceira igualdade usamos o fato de independência que a filtração  $\mathfrak{F}_s$  tem com as v.a  $B_t$  e  $B_t - B_s$ . Logo o MB,  $B_t$  é uma Martingal. Mostremos que o processo  $B_t^2(t) - t$  é uma Martingal. Sabemos que  $\mathbb{E}[B^2(t)] = t < \infty$  assim  $B_t^2(t) - t$  é integrável e temos ainda

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t^2 - t \mid \mathfrak{F}_s] &= \mathbb{E}[B_s^2 + (B_t - B_s)^2 + 2B_s B_t - B_s \mid \mathfrak{F}_s] - t \\ &= B_s^2 + \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] + 2B_s \mathbb{E}[B_t - B_s] - t \\ &= B_s^2 + (t - s) + 0 - t = B_s^2 - s. \end{aligned}$$

Logo  $B_t^2 - t$  é Martingal.

Sabemos que o MB tem distribuição *normal* com média zero e variância  $t$ , isto é,

$$B_t \sim N(0, t).$$

Sabemos que para cada  $t$

$$\mathbb{E}[|e^{uB_t - \frac{tu^2}{2}}|] = e^{-\frac{tu^2}{2}} \mathbb{E}[|e^{uB_t}|] \leq e^{-\frac{tu^2}{2}} < \infty.$$

Logo,  $e^{uB_t - \frac{tu^2}{2}}$  é integrável, e mas, além disso para  $s < t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{uB_t - \frac{tu^2}{2}} \mid \mathfrak{F}_s\right] &= e^{-\frac{tu^2}{2}} \mathbb{E}\left[e^{u(B_t - B_s)} e^{uB_s} \mid \mathfrak{F}_s\right] = e^{-\frac{tu^2}{2}} e^{uB_s} \mathbb{E}[e^{u(B_t - B_s)} \mid \mathfrak{F}_s] \\ &= e^{-\frac{tu^2}{2}} e^{uB_s} \mathbb{E}[e^{uB_{t-s}} \mid \mathfrak{F}_s] = e^{-\frac{tu^2}{2}} e^{uB_s} \mathbb{E}[e^{uB_{t-s}}] \\ &= e^{-\frac{tu^2}{2}} e^{uB_s} e^{\frac{u^2}{2}(t-s)} = e^{uB_s} e^{\frac{u^2}{2}(-s)} = e^{uB_s - \frac{su^2}{2}}. \end{aligned}$$

Logo obtemos que  $\mathbb{E}[e^{uB_t - \frac{tu^2}{2}} \mid \mathfrak{F}_s] = e^{uB_s - \frac{su^2}{2}}$  portanto o processo  $e^{uB_t - \frac{tu^2}{2}}$  é Martingal.

Na figura (23) temos uma realização típica Martingal  $e^{uB_t - \frac{tu^2}{2}}$  com  $t \in [0, 1]$

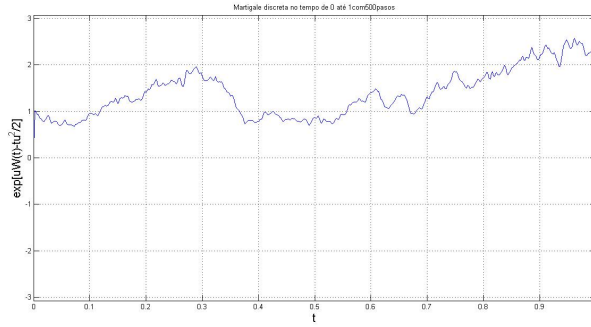


Figura 23 – Martingal  $e^{uB_t - \frac{tu^2}{2}}$  com  $t \in [0, 1]$   $u = .001$  e 500 passos

Mas o processo  $B_t^2$  e  $B_t^3$  com  $B_t$  um MB não é uma Martingal, de fato

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_s^2 \mid \mathfrak{F}_t] &= \mathbb{E}[(B_s - B_t + B_t)^2 \mid \mathfrak{F}_t] = \mathbb{E}[(B_s - B_t)^2 + 2(B_s - B_t)B_t + B_t^2 \mid \mathfrak{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[(B_s - B_t)^2 \mid \mathfrak{F}_t] + 2\mathbb{E}[(B_s - B_t)B_t \mid \mathfrak{F}_t] + \mathbb{E}[B_t^2 \mid \mathfrak{F}_t] \\ &= (t - s) + 0 + B_t^2 \neq B_t^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_s^3 \mid \mathfrak{F}_t] &= \mathbb{E}[(B_s - B_t + B_t)^3 \mid \mathfrak{F}_t] = \mathbb{E}[(B_s - B_t)^3 + 3(B_s - B_t)^2 B_t + 3(B_s - B_t)B_t^2 + B_t^3 \mid \mathfrak{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[(B_s - B_t)^3] + 3\mathbb{E}[(B_s - B_t)^2 B_t] + 3\mathbb{E}[(B_s - B_t)B_t^2] + \mathbb{E}[B_t^3] \\ &= 0 + 3(t - s)B_t + 0 + B_t^3 \neq B_t^3. \end{aligned}$$

### 4.3 Movimento browniano é um processo de Lévy

A importância do processo de Lévy, é o poder de capturar "saltos", pequenos ou grandes, pois, no mundo das finanças, risco, crédito, etc, são principalmente estes modelos que podem dar conta dos "saltos" que acontecem de forma mais realista e por causa de isto, eles constituem uma ferramenta adequada para aumentar a precisão dos modelos em finanças. Eles são usados para modelar os preços de ações e estruturas a termo de taxas de juros, permitindo assim ter uma melhor precisão na precificação de um derivado financeiro e gestão de risco. Devemos definir que o que significa "saltar", pois, já sabemos que o MB, não tem esta propriedade de "saltar" o de modelar um salto, assim devemos introduzir uma classe de funções que tem a propriedade de saltar ou descontinuidade por salto, são as funções *Cadlag*.

**Definição 4.3.1. (*Função Cadlag*).**

A função  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  é *Cadlag*. Se é contínua a direita com os limites a esquerda: Para cada  $t \in [0, T]$ , os limites

$$f(t_-) = \lim_{s \rightarrow t, s < t} f(s) \quad e \quad f(t_+) = \lim_{s \rightarrow t, s > t} f(s).$$

Existem e  $f(t) = f(t_+)$

Se  $t$  é um ponto de descontinuidade denotamos por

$$\Delta f(t) = f(t) - f(t_-).$$

O "salto" de  $f$  em  $t$ . No entanto, as funções *Cadlag* não pode saltar descontroladamente, mais precisamente, a função *Cadlag*  $f$  pode ter no máximo um número contável de descontinuidades. (([TANKOV, 2003](#))); Se  $X_t$  é um processo estocástico, definimos o salto do processo  $X_t$  em no tempo  $t$  como

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-}.$$

Vamos apresentar uma definição para Processos de Lévy e uma definição para o conceito de infinitamente divisível.

**Definição 4.3.2. (*Processos de Lévy*)** (([TANKOV, 2003](#))) Um processo estocástico *cadlag*  $(X_t)_{t \geq 0}$  definido no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  com valores em  $\mathbb{R}^d$  tal que  $X_0(0) = 0$  é chamado de processo de Lévy se possui as seguintes propriedades:

- i) O processo estocástico  $X_t$  tem incrementos independentes, ou seja, para cada sequência de tempos  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  as v.a.  $X_{t_0}$ ,  $X_{t_2} - X_{t_1}$ ,  $X_{t_3} - X_{t_2}$ ,  $\dots$ ,  $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ . São independentes.
- ii) O processo estocástico  $X_t$  tem incrementos estacionários, ou seja, para  $0 \leq s \leq t$  a distribuição de  $X_{t+s} - X_t$  não depende de  $t$ .

iii)  $X_t$  é estocasticamente contínuo, isto é, para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \epsilon) = 0.$$

A terceira condição não implica que as trajetórias do processo são contínuas, mas sim que os saltos de  $X_t$  não acontecem em tempos determinísticos. São muitos processos estocásticos que atendem esta definição, apenas vamos nos concentrar no MB.

**Definição 4.3.3. (*Infinitamente divisível*)** Uma v.a.  $X$  é dita ser infinitamente divisível se para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existem  $n$  variáveis aleatórias identicamente distribuídas (i.i.d)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  tais que

$$X \stackrel{d}{=} X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Seja  $X$  uma v.a. com distribuição  $f$ . A relação entre o conceito de função característica e infinitamente divisível é dada pela Proposição.

**Proposição 4.3.1.** *Seja uma v.a.  $X$  com função de densidade  $f(x)$  e função característica  $\phi_X(u)$ ,  $X$  é infinitamente divisível se para todo  $n \in \mathbb{N}$  existem  $n$  v.a. independentes e identicamente distribuídas (i.i.d)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  cada uma com função característica  $\phi_{X_1}(u)$  que satisfaz*

$$\phi_X(u) = (\phi_{X_1}(u))^n.$$

*Demonstração.* Supor que

$$X \stackrel{d}{=} X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Onde  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são v.a. independentes e identicamente distribuídas (i.i.d), assim

$$f_X(x) = f_{X_1+X_2+\dots+X_n}(x).$$

Logo sabemos que existe uma correspondência entre distribuição de probabilidade e função característica, então

$$\phi_X(u) = \phi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(u).$$

Como as v.a.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são independentes implica que

$$\phi_X(u) = \phi_{X_1}(u) \times \phi_{X_2}(u) \times \dots \times \phi_{X_n}(u).$$

Como as v.a.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são identicamente distribuídas implica que

$$\phi_X(u) = (\phi_{X_1}(u))^n.$$

□

Existe uma relação entre os processos de Lévy e distribuições infinitamente divisíveis. Dado um Processo de Lévy  $(X_t)_{t \geq 0}$ , então  $X_t$  tem uma distribuição infinita divisível para todo  $t \in [0, T]$ , ((SATO, 1999)) e de forma inversa temos que, para cada distribuição infinitamente divisível, sempre existe um Processo de Lévy ((SATO, 1999)). É extremamente importante, pois significa que temos uma correspondência 1 – 1 entre distribuições infinitamente divisíveis e processos de Lévy. Assim como veremos, distribuições normais geram MB, por exemplo.

**Proposição 4.3.2.** *Seja  $X_t$  um processo de Lévy real no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ , então, o processo  $X_t$  tem uma distribuição infinitamente divisível para todo  $t \in [0, T]$*

*Demonstração.* Considere a realização  $X_t$  no tempo  $t$ . Particione o tempo  $t$  em  $n \in \mathbb{N}$  intervalos usando  $t_i = i(\frac{t}{n})$ , assim, temos que

$$X_t = (X_{t_1} - X_{t_0}) + (X_{t_2} - X_{t_1}) + \cdots + (X_{t_n} - X_{t_{n-1}}).$$

Como  $X_t$  é um processo de Lévy, então os incrementos são independentes e identicamente distribuídos, portanto a função característica pode ser escrita como

$$\phi_X(u) = \left( \phi_{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}(u) \right)^n.$$

Logo, a distribuição de  $X_t$  é infinitamente divisível. □

São numerosas as distribuições que são infinitamente divisíveis, alguns exemplos.

**Exemplo 4.3.1.** *Distribuição normal: Usando a Proposição (4.3.1) acima, nós podemos facilmente deduzir que a distribuição normal é infinitamente divisível, pois, de fato, seja  $X$  v.a. tal que  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  Sabemos que:*

$$\begin{aligned} \phi_X(u) &= \exp \left[ iu\mu - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 \right] = \exp \left[ n \left( iu\frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}u^2\frac{\sigma^2}{n} \right) \right] \\ &= \left[ \exp \left( iu\frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}u^2\frac{\sigma^2}{n} \right) \right]^n = \left[ \phi_{X^{\frac{1}{n}}}(u) \right]^n. \end{aligned}$$

Onde  $X^{\frac{1}{n}} \sim N\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

**Exemplo 4.3.2.** *Distribuição de Poisson: Usando o mesmo argumento, podemos concluir que a distribuição de Poisson é também infinitamente divisível, de fato, seja  $X$  v.a. tal que  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , então sabemos que:*

$$\phi_X(u) = \exp \left[ \lambda(e^{iu} - 1) \right] = \left( \exp \left[ \frac{\lambda}{n}(e^{iu} - 1) \right] \right)^n = \left[ \phi_{X^{\frac{1}{n}}}(u) \right]^n.$$

Onde  $X^{\frac{1}{n}} \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$

**Exemplo 4.3.3.** *Distribuição Poisson compensado:* Suponhamos agora que  $X$  é uma variável aleatória, que distribuiu  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$  e que  $\{Z_i; i \geq 0\}$  é uma sequência de v.a.i.i.d. independentes de  $X$  com distribuição comum  $F_z$ , logo a variável aleatória  $X \sim PC(\lambda, F_z)$ . sabemos que a função característica de  $X$  é

$$\phi_X(u) = \exp \left[ \int_{\mathbb{R}} (e^{iuy} - 1) \lambda F_z(dy) \right]. \quad (4.20)$$

Se tomamos cada variável  $Y_j^n \sim PC\left(\frac{\lambda}{n}, F_z\right)$  temos que a v.a.  $X$  é infinitamente divisível

**Exemplo 4.3.4.** *Cauchy*

Seja  $X$  v.a. que distribui  $X \sim C(b, a)$ , sua função característica é:

$$\phi_X(\omega) = \exp(i a \omega - b |\omega|) \quad (4.21)$$

Assim temos que:

$$\phi_X(\omega)^{\frac{1}{n}} = (\exp(i a \omega - b |\omega|))^{\frac{1}{n}} = \left( \exp\left(\frac{i a \omega}{n} - \frac{b |\omega|}{n}\right) \right) = \left( \exp\left(i \left(\frac{a}{n}\right) \omega - \left(\frac{b}{n}\right) |\omega|\right) \right).$$

Isto significa que uma v.a. de Cauchy  $X$  com parâmetros  $a$  e  $b$  tem uma distribuição idêntica com as somas de  $n$  v.a. de Cauchy (i.i.d), cada uma com parâmetro de localização  $\frac{a}{n}$  e parâmetro de escala  $\frac{b}{n}$ .

**Exemplo 4.3.5.** *a distribuição de uma v.a. uniforme é uma distribuição que não infinitamente divisível.*

A representação Lévy-Khintchine nós fornece as funções características de todas as distribuições infinitamente divisíveis. Em outras palavras, ele dá as funções características de todos os processos cujos incrementos seguem distribuições infinitamente divisíveis, o que dá uma caracterização de variáveis aleatórias infinitamente divisíveis por meio de suas funções características. Mas, primeiro, é preciso apresentar duas definições importantes.

**Definição 4.3.4. (*medida de Lévy*)** ((TANKOV, 2003)) pág 88: Seja  $(X_t)_{t \geq 0}$  um processo de Lévy em  $\mathbb{R}^d$ . A medida  $\nu$  em  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  definida por.

$$\nu(A) = \mathbb{E}[\#t \in [0, 1] : \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A] \quad \text{com } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (4.22)$$

é chamada medida de Lévy de  $X$  :  $\nu(A)$  é o número esperado de saltos, por unidade de tempo, de um tamanho pertencente  $A$

**Definição 4.3.5. (*Medida de Radon*).** Seja  $E \subset \mathbb{R}^d$ . A medida Radon em  $(E, \mathcal{B})$  é uma medida  $\mu$  tal que para cada conjunto mensurável compacto  $B \in \mathcal{B}$ , temos que  $\mu(B) < \infty$



**Teorema 4.3.1. (Teorema da representação Lévy-Khintchine)** ((TANKOV, 2003))  
 Seja  $\mathbf{F}$  uma distribuição infinitamente divisível em  $\mathbb{R}^d$ . Sua função característica pode ser representada como:

$$\Phi_{\mathbf{F}}(z) = e^{\psi(z)} \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

Com

$$\psi(z) = -\frac{1}{2} \langle z, Az \rangle + i \langle \gamma, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{izx} - 1 - izx \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \nu(dx).$$

Onde  $A$  é uma matriz simétrica positiva  $n \times n$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}^d$  e  $\nu$  é uma medida positiva Radon em  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  verificando:

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \nu(dx) < \infty.$$

E

$$\int_{|x| \geq 1} \nu(dx) < \infty.$$

Onde  $\nu$  é chamada de medida de Lévy da distribuição  $\mathbf{F}$ .

A demonstração pode ser obtida em ((TANKOV, 2003)) Teorema 3.1 e 3.2 pag 95-pag 97; (SATO, 1999) p.37-p.47. Sabemos que um movimento browniano é um processo de Lévy, de fato, como o movimento browniano tem trajetórias contínuas, em particular, é um processo Cadlag e é estocasticamente contínuo, também sabemos que o MB tem incrementos independentes e estacionários, logo são satisfeitos todos os item da definição do processo de Lévy. É importante notar que o movimento browniano é o único o processo de Lévy contínuo gerado por uma distribuição normal.

**Teorema 4.3.2.** *Seja  $X_t$  um processo de Lévy contínuo. Então existem  $\gamma \in \mathbb{R}^d$  e uma matriz simétrica definida  $\mathcal{A}$  tal que positiva*

$$X_t = \gamma t + W_t.$$

Onde  $W_t$  é um movimento browniano com matriz de covariância  $\mathcal{A}$

*Demonstração.* É o suficiente demonstrar que  $X_1$  tem distribuição Gaussiana, o resto seguirá a partir da estacionariedade e independência dos incrementos. Vamos usar o Teorema de representação de Lévy-Khintchine, 4.3.1. Usando a definição de medida de Lévy, a definição (4.3.4), temos que, a medida de Lévy do processo  $X_t$  é zero para todo  $t$ , ou seja,  $\nu \equiv 0$ . Assim, usando o Teorema de representação de Lévy-Khintchine, Teorema (4.3.1), temos que o processo de Lévy,  $X_t$ , tem uma função característica representada como:

$$\Phi_{\mathbf{X}_1}(z) = \mathbb{E}[e^{izX_1}] = e^{\psi(z)} \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

Com

$$\psi(z) = -\frac{1}{2} \langle z, \mathcal{A}z \rangle + i \langle \gamma, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{izx} - 1 - izx \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \nu(dx).$$

Mas como  $\nu \equiv 0$  temos que

$$\psi(z) = -\frac{1}{2} \langle z, Az \rangle + i \langle \gamma, z \rangle.$$

Logo

$$\Phi_{\mathbf{X}_1}(z) = \mathbb{E}[e^{izX_1}] = e^{-\frac{1}{2}\langle z, Az \rangle + i\langle \gamma, z \rangle} \quad z \in \mathbb{R}^d$$

que é a função característica do MB com Drift que é um processo gaussiano, com matriz de covariância  $\mathcal{A}$ . Como queríamos provar.  $\square$

## 4.4 Processos construídos a partir do movimento browniano

Esta seção é muito importante, porque quando vamos tendo diferentes configurações para o MB, começam aparecer processos estocásticos diferentes com ou sem as propriedades do MB e muitos destes processos tem diferentes aplicações.

### 4.4.1 Movimento browniano com ponte

Seja  $(B_t)_{t \geq 0}$  um MB. Considere o processo

$$Bb_t = B_t - \frac{t}{T} B_T \quad t \in [0, T] \text{ com } T > 0$$

O processo  $Bb_t$  é chamado de **(Movimento browniano com ponte ou bridge)**. Note que:

1. O processo  $Bb_t$  é um processo gaussiano, pois,  $B_t$  e  $B_T$  o são. De fato

$$\begin{aligned} F_{Bb_t}(x) &= \mathbb{P}[Bb_t \leq x] = \mathbb{P}[B_t - \frac{t}{T} B_T \leq x] = \mathbb{P}\left[\frac{B_t}{\sqrt{t}} - \frac{t}{T\sqrt{t}} B_T \leq \frac{x}{\sqrt{t}}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[B_1 - \frac{t}{T\sqrt{t}} B_T \leq \frac{x}{\sqrt{t}}\right] = \mathbb{P}\left[\frac{B_1}{\sqrt{T}} - \frac{t}{T\sqrt{t}} \frac{B_T}{\sqrt{T}} \leq \frac{x}{\sqrt{t}\sqrt{T}}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\frac{B_1}{\sqrt{T}} - \frac{t}{T\sqrt{t}} B_1 \leq \frac{x}{\sqrt{t}\sqrt{T}}\right] = \mathbb{P}\left[B_1 \left(\frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{t}{T\sqrt{t}}\right) \leq \frac{x}{\sqrt{t}\sqrt{T}}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[B_1 \left(\frac{\sqrt{T}\sqrt{t} - t}{T\sqrt{t}}\right) \leq \frac{x}{\sqrt{t}\sqrt{T}}\right] = \mathbb{P}\left[B_1 \leq \frac{xT\sqrt{t}}{\sqrt{t}\sqrt{T}(\sqrt{T}\sqrt{t} - t)}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[B_1 \leq \frac{x\sqrt{T}}{(\sqrt{T}\sqrt{t} - t)}\right] \quad B_1 \sim \mathbf{N}(0, 1) \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{x\sqrt{T}}{(\sqrt{T}\sqrt{t} - t)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \end{aligned}$$

Assim, se chamamos  $a = \frac{\sqrt{T}}{(\sqrt{T}\sqrt{t} - t)}$ , temos que

$$F_{Bb_t}(x) = \int_{-\infty}^{xa} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

logo  $Bb_t$  é gaussiano.

2. Em  $t = 0$  temos que  $Bb_0 = 0$  e em  $t = T$  temos  $Bb_T = 0$ .
3. O processo  $Bb_t$  é um processo contínuo, pois,  $B_t$  é contínuo.
4. A esperança do processo  $Bb_t$  é zero, ou seja,

$$\mathbb{E}[Bb_t] = \mathbb{E}[B_t - \frac{t}{T}B_T] = \mathbb{E}[B_t] - \frac{t}{T}\mathbb{E}[B_T] = 0 - \frac{t}{T} \cdot 0 = 0.$$

E sua variância é dada por

$$\begin{aligned} V[Bb_t] &= \mathbb{E}[(Bb_t - \mathbb{E}[Bb_t])^2] = \mathbb{E}[(Bb_t)^2] = \mathbb{E}\left[(B_t)^2 - 2\frac{t}{T}B_tB_T + \left(\frac{t}{T}\right)^2(B_T)^2\right] \\ &= \mathbb{E}[(B_t)^2] - 2\frac{t}{T}\mathbb{E}[B_tB_T] + \left(\frac{t}{T}\right)^2\mathbb{E}[(B_T)^2] = t - 2\frac{t}{T} \cdot t + \left(\frac{t}{T}\right)^2T \\ &= \frac{t(T-t)}{T} \quad t \in [0, T] \text{ com } T > 0. \end{aligned}$$

O processo  $Bb_t$  é gaussiano e a v.a.  $B_T$  também é gaussiano, assim podemos concluir que são independentes se sua covariância é zero, isto é calculemos a covariância

$$\begin{aligned} Cov[Bb_t, B_T] &= \mathbb{E}[(Bb_t - \mathbb{E}[Bb_t])(B_T - \mathbb{E}[B_T])] \\ &= \mathbb{E}[Bb_tB_T - Bb_t\mathbb{E}[B_T] - \mathbb{E}[Bb_t]B_T + \mathbb{E}[Bb_t]\mathbb{E}[B_T]] \\ &= \mathbb{E}[Bb_tB_T] = \mathbb{E}\left[(B_t - \frac{t}{T}B_T)B_T\right] = \mathbb{E}\left[B_tB_T - \frac{t}{T}B_TB_T\right] \\ &= \mathbb{E}[B_tB_T] - \frac{t}{T}\mathbb{E}[B_TB_T] = \min(t, T) - \frac{t}{T}\min(T, T) = t - t = 0. \end{aligned}$$

Como  $Bb_t$  e  $B_T$  são processos gaussianos, temos a independência. Calculemos a covariância

$$\begin{aligned} Cov[Bb_t, Bb_s] &= \mathbb{E}[Bb_tBb_s] = \mathbb{E}\left[(B_t - \frac{t}{T}B_T)(B_s - \frac{s}{T}B_T)\right] \\ &= \mathbb{E}[B_tB_s] - \frac{s}{T}\mathbb{E}[B_tB_T] - \frac{t}{T}\mathbb{E}[B_sB_T] + \frac{st}{T^2}\mathbb{E}[B_T^2] \\ &= \min(t, s) - \frac{s}{T}\min(t, T) - \frac{t}{T}\min(s, T) + \frac{st}{T^2}\min(T, T) \\ &= \min(t, s) - \frac{s}{T}t - \frac{t}{T}s + \frac{st}{T^2}T \\ &= \min(t, s) - \frac{st}{T} \quad t, s \in [0, T] \text{ com } T > 0. \end{aligned}$$

A seguinte Proposição mostra mais uma grande diferença entre os processos brownianos com ponte e o movimento browniano.

**Proposição 4.4.1.** *O processo estocástico browniano com ponte,  $Bb_t$  não tem incrementos estacionários independentes.*

*Demonstração.* Sejam  $Bb_t$  um processo browniano com ponte e uma partição arbitrária de tempos

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n \leq T$$

Mostremos que não tem incrementos independentes, como as v.a.

$$Bb_{t_k} - Bb_{t_{k-1}} \quad e \quad Bb_{t_{k+1}} - Bb_{t_k}$$

são processos gaussianos basta mostrar que,

$$\text{Cov} \left[ (Bb_{t_k} - Bb_{t_{k-1}}), (Bb_{t_{k+1}} - Bb_{t_k}) \right] \neq 0$$

Então, temos que

$$\begin{aligned} & \text{Cov} \left[ (Bb_{t_k} - Bb_{t_{k-1}}), (Bb_{t_{k+1}} - Bb_{t_k}) \right] = \\ & \text{Cov} \left[ (Bb_{t_k}, Bb_{t_{k+1}}) \right] - \text{Cov} \left[ (Bb_{t_k}, Bb_{t_k}) \right] - \text{Cov} \left[ (Bb_{t_{k-1}}, Bb_{t_{k+1}}) \right] + \text{Cov} \left[ (Bb_{t_{k-1}}, Bb_{t_k}) \right] = \\ & \left( t_k - \frac{t_k t_{k+1}}{T} \right) - \left( t_k - \frac{t_k^2}{T} \right) - \left( \min(t_{k+1}, t_{k-1}) - \frac{t_{k+1} t_{k-1}}{T} \right) + \left( \min(t_k, t_{k-1}) - \frac{t_k t_{k-1}}{T} \right) = \\ & \left( t_k - \frac{t_k t_{k+1}}{T} \right) - \left( t_k - \frac{t_k^2}{T} \right) - \left( t_{k-1} - \frac{t_{k+1} t_{k-1}}{T} \right) + \left( t_{k-1} - \frac{t_k t_{k-1}}{T} \right) = \\ & \frac{T t_k - t_k t_{k+1} - T t_k + t_k^2}{T} - \frac{(T t_{k-1} - t_{k+1} t_{k-1})}{T} + \frac{T t_{k-1} - t_k t_{k-1}}{T} = \\ & \frac{t_k^2 - t_{k+1} t_k + t_{k-1} t_{k+1} - t_{k-1} t_k}{T} = \\ & \frac{t_k(t_k - t_{k+1}) + t_{k-1}(t_{k+1} - t_k)}{T} \neq 0 \quad \text{para todo } k \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

Portando

$$\text{Cov} \left[ (Bb_{t_k} - Bb_{t_{k-1}}), (Bb_{t_{k+1}} - Bb_{t_k}) \right] \neq 0$$

Logo, não tendo covariância nula, o browniano com ponte,  $Bb_t$ , não é um processo de incrementos independentes. Mostremos que não tem incrementos estacionários, ou seja, devemos mostrar que a v.a.  $Bb_{t_k+h} - Bb_{t_{k-1}+h}$  não tem a mesma distribuição que a v.a.  $Bb_{t_k} - Bb_{t_{k-1}}$ , isto é,

$$Bb_{t_k+h} - Bb_{t_{k-1}+h} \stackrel{d}{\neq} Bb_{t_k} - Bb_{t_{k-1}}$$

Sabemos que

$$\mathbb{E} \left[ Bb_{t_k+h} - Bb_{t_{k-1}+h} \right] = 0 = \mathbb{E} \left[ Bb_{t_k} - Bb_{t_{k-1}} \right]$$

Calculemos a variância da v.a.  $Bb_{t_k} - Bb_{t_{k-1}}$ , assim temos que

$$\begin{aligned} V \left[ Bb_{t_k} - Bb_{t_{k-1}} \right] &= V \left[ Bb_{t_k} \right] - V \left[ Bb_{t_{k-1}} \right] = \frac{t_k(T - t_k)}{T} - \frac{t_{k-1}(T - t_{k-1})}{T} \\ &= \frac{T t_k - t_k^2 - T t_{k-1} + t_{k-1}^2}{T} = (t_k - t_{k-1}) \frac{t_{k-1}^2 - t_k^2}{T} \\ &= (t_k - t_{k-1}) - \frac{t_k^2 - t_{k-1}^2}{T} \end{aligned}$$

Calculemos a variância da v.a.  $Bb_{t_k+h} - Bb_{t_{k-1}+h}$ , com  $h > 0$ , assim temos que

$$\begin{aligned}
V[Bb_{t_k+h} - Bb_{t_{k-1}+h}] &= V[Bb_{t_k+h}] - V[Bb_{t_{k-1}+h}] \\
&= \frac{(t_k + h)[T - (t_k + h)]}{T} - \frac{(t_{k-1} + h)[T - (t_{k-1} + h)]}{T} \\
&= \frac{(t_k + h)[T - t_k - h]}{T} - \left[ \frac{(t_{k-1} + h)[T - t_{k-1} - h]}{T} \right] \\
&= \left[ \frac{Tt_k - t_k^2 + hT - 2ht_k - h^2}{T} \right] - \left[ \frac{Tt_{k-1} - t_{k-1}^2 + hT - 2ht_{k-1} - h^2}{T} \right] \\
&= \left[ \frac{Tt_k - Tt_{k-1} + 2ht_{k-1} - 2ht_k}{T} \right] + \left[ \frac{-2ht_{k-1} + t_{k-1}^2 - t_k^2}{T} \right] \\
&= \left[ \frac{T(t_k - t_{k-1}) + h(t_{k-1} - 2t_k - 2t_{k-1}) + t_{k-1}^2 - t_k^2}{T} \right] \\
&= \left[ \frac{T(t_k - t_{k-1}) + t_{k-1}^2 - t_k^2}{T} \right] + \left[ \frac{h(t_{k-1} - 2t_k - 2t_{k-1})}{T} \right] \\
&\neq V[Bb_{t_i} - Bb_{t_{i-1}}] \quad \text{para } h > 0 \text{ e para todo } k \in \{0, 1, \dots, n\}.
\end{aligned}$$

Portanto a v.a.  $Bb_{t_k} - Bb_{t_{k-1}}$  tem distribuição *normal*

$$Bb_{t_k} - Bb_{t_{k-1}} \sim \mathbf{N}\left(0, (t_k - t_{k-1}) \frac{t_{k-1}^2 - t_k^2}{T}\right)$$

e a v.a.  $Bb_{t_k+h} - Bb_{t_{k-1}+h}$  tem distribuição *normal*

$$Bb_{t_k+h} - Bb_{t_{k-1}+h} \sim \mathbf{N}\left(0, (t_k - t_{k-1}) \frac{t_{k-1}^2 - t_k^2}{T} + \frac{h(t_{k-1} - 2t_k - 2t_{k-1})}{T}\right)$$

Portanto,  $Bb_t$ , é um processo que não tem incrementos estacionários.  $\square$

Em resumo, o processo browniano com ponte,  $Bb_t$  é um processo estocástico gaussiano, centrado com incrementos não independentes não estacionários. Isto acontece por condicionar o MB a seu valor final nulo e anular o valor, no intervalo considerado, o que faz perder sua natureza original. Na figura (24) temos um movimento browniano com ponte para  $T = 1$  com 500 passos.

#### 4.4.2 Movimento browniano com Drift

Seja  $(B_t)_{t \geq 0}$  um MB. Considere o processo

$$BD_t = \mu t + \sigma B_t \quad t \geq 0, \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0$$

O processo  $BD_t$  é chamado de (**Movimento browniano com Drift ou tendência ou aritmético**). Note que:

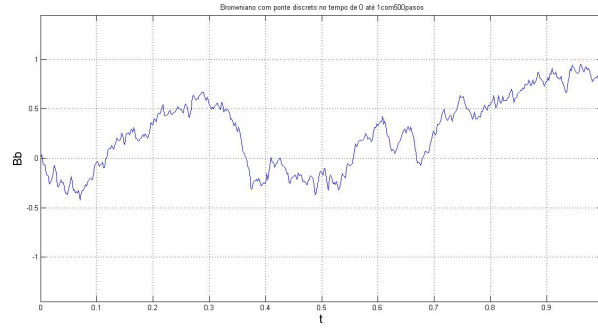


Figura 24 – Movimento browniano com ponte para  $T = 1$  com 500 passos

1. O processo  $BD_t$  é um processo gaussiano

$$\begin{aligned}
 F_{BD}(x) &= \mathbb{P}[BD_t \leq x] = \mathbb{P}[\mu t + \sigma B_t \leq x] = \mathbb{P}[\sigma B_t \leq x - \mu t] \quad \frac{1}{2} \text{ auto-similar} \\
 &= \mathbb{P}\left[\sigma\sqrt{t}B_1 \leq x - \mu t\right] = \mathbb{P}\left[B_1 \leq \frac{x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right] = \int_{-\infty}^{\frac{x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.
 \end{aligned}$$

Se derivamos  $F_{BD}(x)$  com relação  $x$  obtemos a função densidade  $f_{BD}(x)$  de uma v.a. *normal* com média  $\mu t$  e variância  $\sigma^2 t$ , onde

$$f_{BD}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} dx$$

também podíamos usar o Teorema (3.2.2). Logo o processo  $BD_t$  é um processo gaussiano.

2. Em  $t = 0$  temos que  $BD_0 = 0$ .
3. O processo  $BD_t$  é um processo contínuo, pois,  $B_t$  é contínuo.
4. A esperança do processo  $BD_t$  é  $\mu t$ , ou seja,

$$\mathbb{E}[BD_t] = \mathbb{E}[\mu t + \sigma B_t] = \mu t + \sigma \mathbb{E}[B_t] = \mu t + 0 = \mu t$$

E sua variância dada por

$$V[BD_t] = V[\mu t + \sigma B_t] = 0 + \sigma^2 V[B_t] = \sigma^2 t.$$

E sua covariância

$$\begin{aligned}
 Cov[BD_t, BD_s] &= Cov[(\mu t + \sigma B_t), (\mu s + \sigma B_s)] \\
 &= Cov[\mu t, \mu s] + Cov[\mu t, \sigma B_s] + Cov[\mu s, \sigma B_t] + Cov[\sigma B_t, \sigma B_s] \\
 &= 0 + 0 + 0 + \sigma^2 Cov[B_t, B_s] = \sigma^2 \min(t, s).
 \end{aligned}$$

**Proposição 4.4.2.** *O processo estocástico browniano com Drift,  $BD_t$  tem incrementos independentes e estacionários.*

*Demonstração.* Sejam  $BD_t$  um processo browniano com Drift e uma partição arbitrária de tempos

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n \leq T$$

Mostremos que tem incrementos independentes, como as v.a.

$$BD_{t_k} - BD_{t_{k-1}} \quad e \quad BD_{t_{k+1}} - BD_{t_k}$$

são processos gaussianos basta mostrar que

$$Cov \left[ (BD_{t_k} - BD_{t_{k-1}}), (BD_{t_{k+1}} - BD_{t_k}) \right] = 0$$

Vamos a escrever  $C = Cov$ , por razões de espaço Então, temos que

$$\begin{aligned} Cov \left[ (BD_{t_k} - BD_{t_{k-1}}), (BD_{t_{k+1}} - BD_{t_k}) \right] &= \\ C \left[ (BD_{t_k}, BD_{t_{k+1}}) \right] - C \left[ (BD_{t_k}, BD_{t_k}) \right] - C \left[ (BD_{t_{k-1}}, BD_{t_{k+1}}) \right] + C \left[ (BD_{t_{k-1}}, BD_{t_k}) \right] &= \\ \sigma^2 \min(t_k, t_{k+1}) - \sigma^2 \min(t_k, t_k) - \sigma^2 \min(t_{k-1}, t_{k+1}) + \sigma^2 \min(t_{k-1}, t_k) &= \\ = \sigma^2 t_k - \sigma^2 t_k - \sigma^2 t_{k-1} + \sigma^2 t_{k-1} &= \\ = 0 \quad \text{para todo } k \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

Logo, tendo covariância nula, o browniano com Drift,  $BD_t$ , é um processo de incrementos independentes.

Agora mostremos que tem incrementos estacionários, ou seja, devemos mostrar que a v.a.  $BD_{t_k+h} - BD_{t_{k-1}+h}$  tem a mesma distribuição que a v.a.  $BD_{t_k} - BD_{t_{k-1}}$ , isto é

$$BD_{t_k+h} - BD_{t_{k-1}+h} \stackrel{d}{=} BD_{t_k} - BD_{t_{k-1}} \quad \text{com } h > 0$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [BD_{t_k+h} - BD_{t_{k-1}+h}] &= \mathbb{E} [BD_{t_k+h}] - \mathbb{E} [BD_{t_{k-1}+h}] = \mu(t_k + h) - \mu(t_{k-1} + h) \\ &= \mu(t_k - t_{k-1}) \quad \text{para todo } k \in \{1, 2, \dots, n\} \\ &= \mathbb{E} [BD_{t_k} - BD_{t_{k-1}}]. \end{aligned}$$

Calculemos a variância da v.a.  $BD_{t_k} - BD_{t_{k-1}}$ , assim temos que

$$\begin{aligned} V [BD_{t_k} - BD_{t_{k-1}}] &= V [BD_{t_k}] - V [BD_{t_{k-1}}] = \sigma^2 t_k - \sigma^2 t_{k-1} \\ &= \sigma^2 (t_k - t_{k-1}) \quad \text{para todo } k \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Logo

$$V [BD_{t_k} - BD_{t_{k-1}}] = \sigma^2 (t_k - t_{k-1})$$

Calculemos a variância da v.a.  $BD_{t_k+h} - BD_{t_{k-1}+h}$ , com  $h > 0$ , assim temos que

$$\begin{aligned} V [BD_{t_k+h} - BD_{t_{k-1}+h}] &= V [BD_{t_k+h}] - V [BD_{t_{k-1}+h}] \\ &= \sigma^2 (t_k + h) - \sigma^2 (t_{k-1} + h) \\ &= \sigma^2 (t_k - t_{k-1}) \quad \text{para } h > 0 \text{ e para todo } k \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

□

Portanto a v.a.  $BD_{t_k} - BD_{t_{k-1}}$  tem distribuição *normal*

$$BD_{t_k} - BD_{t_{k-1}} \sim \mathbf{N}(\mu(t_k - t_{k-1}), \sigma^2(t_k - t_{k-1}))$$

e a v.a.  $BD_{t_k+h} - BD_{t_{k-1}+h}$  tem distribuição *normal*

$$BD_{t_k+h} - BD_{t_{k-1}+h} \sim \mathbf{N}(\mu(t_k - t_{k-1}), \sigma^2(t_k - t_{k-1}))$$

Portanto temos que

$$BD_{t_k+h} - BD_{t_{k-1}+h} \sim \mathbf{N}(\mu(t_k - t_{k-1}), \sigma^2(t_k - t_{k-1})) \sim BD_{t_k} - BD_{t_{k-1}}$$

Em resumo, o processo browniano com Drift,  $BD_t$  é um processo estocástico gaussiano, centrado com incrementos independentes e estacionários. Na figura (25) temos um movimento browniano com Drift para  $t \in [0, 100]$ ,  $\mu = 0.1$  e  $\sigma = 0.1$  com 200000 passos.

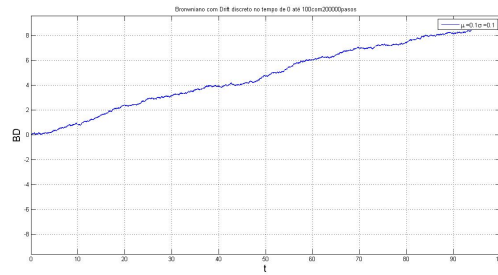


Figura 25 – Movimento browniano com Drift para  $t \in [0, 100]$ ,  $\mu = 0.1$  e  $\sigma = 0.1$  com 200000 passos

#### 4.4.3 Movimento browniano geométrico

Seja  $(B_t)_{t \geq 0}$  um MB, Considere o processo

$$BG_t = e^{\mu t + \sigma B_t} \quad t \geq 0, \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0$$

O processo  $BG_t$  é chamado de (**Movimento browniano Geométrico**). Note que:

1. Em  $t = 0$  temos que  $BG_0 = 1$ .
2. O processo  $BG_t$  é um processo contínuo quase certamente, pois, a função exponencial é contínua e  $B_t$  é contínuo, logo a composta de funções contínuas é uma função contínua.
3. A esperança do processo  $BG_t$  é  $e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}}$ , ou seja,

$$\mathbb{E}[BG_t] = \mathbb{E}[e^{\mu t + \sigma B_t}] = e^{\mu t} \mathbb{E}[e^{\sigma B_t}] = e^{\mu t} \mathbb{E}[e^{\sigma \sqrt{t} B_1}] = e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}} ..$$



Onde na terceira igualdade usamos o fato de  $B_t$  ser  $\frac{1}{2}$  auto similar, na quarta igualdade usamos o fato que  $B_1 \sim N(0, 1)$ . Calculemos sua variância, usando o fato que  $V[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$  calculemos primeiro o termo  $\mathbb{E}[X^2]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[BG_t^2] &= \mathbb{E}[(e^{\mu t + \sigma B_t})^2] = \mathbb{E}[e^{2\mu t + 2\sigma B_t}] = e^{2\mu t} \mathbb{E}[e^{2\sigma B_t}] \\ &= e^{2\mu t} \mathbb{E}[e^{2\sigma \sqrt{t} B_1}] = e^{2\mu t} e^{\frac{4\sigma^2 t}{2}} = e^{2\mu t + 2\sigma^2 t}\end{aligned}$$

Onde na quarta igualdade usamos o fato que  $B_t$  é  $\frac{1}{2}$  auto similar e na quinta igualdade usamos o fato de  $B_1 \sim N(0, 1)$ . Assim podemos calcular sua variância, ou seja,

$$\begin{aligned}V[BG_t] &= \mathbb{E}[BG_t^2] - (\mathbb{E}[BG_t])^2 = e^{2\mu t + 2\sigma^2 t} - \left(e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}}\right)^2 \\ &= e^{2\mu t + 2\sigma^2 t} - e^{2\mu t + \sigma^2 t} = e^{2\mu t + \sigma^2 t} [e^{\sigma^2 t} - 1].\end{aligned}$$

4. Para  $s \leq t$  temos que  $B_t - B_s$  e  $B_s$  são independentes e também que

$$B_t - B_s \stackrel{d}{=} B_{t-s}$$

usando ( $C = Cov$ ) podemos calcular a covariância, Então, temos que

$$\begin{aligned}C[BG_s, BG_t] &= \mathbb{E}[BG_s BG_t] - \mathbb{E}[BG_s] \mathbb{E}[BG_t] \\ &= \mathbb{E}[e^{\mu(s+t) + \sigma(B_t + B_s)}] - e^{\mu s + \frac{\sigma^2 s}{2}} e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}} \\ &= e^{\mu(s+t)} \mathbb{E}[e^{\sigma(B_t + B_s)}] - e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2 s}{2})} \\ &= e^{\mu(s+t)} \mathbb{E}[e^{\sigma(B_t + B_s - B_s + B_s)}] - e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2 s}{2})} \\ &= e^{\mu(s+t)} \mathbb{E}[e^{\sigma(B_t - B_s)}] \mathbb{E}[e^{2\sigma B_s}] - e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2 s}{2})} \\ &= e^{\mu(s+t)} \mathbb{E}[e^{\sigma B_{t-s}}] \mathbb{E}[e^{2\sigma B_s}] - e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2 s}{2})} \\ &= e^{\mu(s+t)} \mathbb{E}[e^{\sigma \sqrt{t-s} B_1}] \mathbb{E}[e^{2\sigma \sqrt{s} B_1}] - e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2 s}{2})} \\ &= e^{\mu(s+t)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)} e^{2\sigma^2 s} - e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2 s}{2})} \\ &= e^{\mu(s+t)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(t+s)} e^{\sigma^2 s} - e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2 s}{2})} \\ &= e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2 s}{2})} (e^{\sigma^2 s} - 1).\end{aligned}$$

Onde na igualdade quinta usamos a independência, na sexta igualdade usamos o fato que  $B_t - B_s \stackrel{d}{=} B_{t-s}$ , na sétima igualdade usamos o fato que  $B_t$  é  $\frac{1}{2}$  auto similar.

5. O processo browniano geométrico,  $BG_t$  é um processo estocástico com distribuição lognormal, com parâmetros  $\mu t$  e  $\sigma \sqrt{t}$ , ou seja  $BG_t \sim \text{LogN}(\mu t, \sigma \sqrt{t})$ , de fato

$$\begin{aligned}
F_{BG_t}(x) &= \mathbb{P}[BG_t \leq x] = \mathbb{P}[e^{\mu t + \sigma B_t} \leq x] = \mathbb{P}[\mu t + \sigma B_t \leq \ln x] \\
&= \mathbb{P}\left[B_t \leq \frac{(\ln x - \mu t)}{\sigma}\right] = \mathbb{P}\left[\frac{B_t}{\sqrt{t}} \leq \frac{(\ln x - \mu t)}{\sigma \sqrt{t}}\right] = \int_{-\infty}^{\frac{(\ln x - \mu t)}{\sigma \sqrt{t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.
\end{aligned}$$

Agora diferenciando  $F_{BG_t}(x)$  em relação a  $x$ , podemos obter a função de densidade, isto é,

$$f_{BG_t}(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi t}} e^{\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right)^2\right)}$$

6. Para mostrar que  $BG_t$  não tem incrementos independentes. sabemos que se  $X$  e  $Y$  são v.a. independentes implica que  $Cov[X, Y] = 0$ , então vamos supor que

$$X = BG_{t_k} - BG_{t_{k-1}} \quad e \quad Y = BG_{t_{k+1}} - BG_{t_k}$$

são v.a. independentes e mostremos que a  $Cov[X, Y] \neq 0$ .

Para uma partição arbitrária de tempos

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n \leq T$$

usando ( $C = Cov$ ) podemos calcular a covariância, Então, temos que

$$\begin{aligned}
C[X, Y] &= C[(BG_{t_k} - BG_{t_{k-1}}), (BG_{t_{k+1}} - BG_{t_k})] \\
&= C[(BG_{t_k}), (BG_{t_{k+1}})] - C[(BG_{t_k}), (BG_{t_k})] \\
&\quad - C[(BG_{t_{k-1}}), (BG_{t_{k+1}})] + C[(BG_{t_{k-1}}), (BG_{t_k})] \\
&= \left[ e^{(t_k + t_{k+1})(\mu + \frac{\sigma^2 t_k}{2})} (e^{\sigma^2 t_k} - 1) \right] - \left[ e^{2(t_k)(\mu + \frac{\sigma^2 t_k}{2})} (e^{\sigma^2 t_k} - 1) \right] \\
&\quad - \left[ e^{(t_{k-1} + t_{k+1})(\mu + \frac{\sigma^2 t_{k-1}}{2})} (e^{\sigma^2 t_{k-1}} - 1) \right] \\
&\quad + \left[ e^{(t_{k-1} + t_k)(\mu + \frac{\sigma^2 t_{k-1}}{2})} (e^{\sigma^2 t_{k-1}} - 1) \right] \\
&= (e^{\sigma^2 t_k} - 1) \left[ e^{(t_k + t_{k+1})(\mu + \frac{\sigma^2 t_k}{2})} - e^{2(t_k)(\mu + \frac{\sigma^2 t_k}{2})} \right] \\
&\quad - (e^{\sigma^2 t_{k-1}} - 1) \left[ e^{(t_{k-1} + t_{k+1})(\mu + \frac{\sigma^2 t_{k-1}}{2})} - e^{(t_{k-1} + t_k)(\mu + \frac{\sigma^2 t_{k-1}}{2})} \right] \\
&= (e^{\sigma^2 t_k} - 1) \left( e^{t_k(\mu + \frac{\sigma^2 t_k}{2})} \right) \left[ e^{t_{k+1}(\mu + \frac{\sigma^2 t_k}{2})} - e^{t_k(\mu + \frac{\sigma^2 t_{k-1}}{2})} \right] \\
&\quad - (e^{\sigma^2 t_{k-1}} - 1) \left( e^{t_{k-1}(\mu + \frac{\sigma^2 t_{k-1}}{2})} \right) \left[ e^{t_{k+1}(\mu + \frac{\sigma^2 t_{k-1}}{2})} - e^{t_k(\mu + \frac{\sigma^2 t_{k-1}}{2})} \right] \\
&\neq 0 \quad \text{Para } k \in \{1, 2, \dots, n\}
\end{aligned}$$

Logo temos uma contradição, portanto as v.a.

$$X = BG_{t_k} - BG_{t_{k-1}} \quad e \quad Y = BG_{t_{k+1}} - BG_{t_k}$$

não são v.a. independentes então o processo  $BG_t$  não tem incrementos independentes.

7. Para mostrar que  $BG_t$  não tem incrementos estacionários, para uma partição arbitrária de tempos

$$0 = t_0 < t_1 \cdots < t_k < t_{k+1} \cdots t_n \leq T$$

só temos que mostrar que as v.a.

$$BG_{t_k+h} - BG_{t_k} \quad e \quad BG_h - BG_0$$

tem distribuições diferentes, ou seja,

$$BG_{t_k+h} - BG_{t_k} \stackrel{d}{\neq} BG_h - BG_0$$

Então, calculemos as esperanças

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[BG_{t_k+h} - BG_{t_k}] &= \mathbb{E}[BG_{t_k+h}] - \mathbb{E}[BG_{t_k}] = \left[ e^{\mu(t_k+h)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(t_k+h)} \right] - \left[ e^{\mu(t_k)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(t_k)} \right] \\ &= \left( e^{\mu(t_k)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(t_k)} \right) \left[ e^{\mu(h)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(h)} - 1 \right]. \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[BG_{t_k} - BG_0] = \mathbb{E}[BG_{t_k}] - \mathbb{E}[BG_0] = \left[ e^{\mu(t_k)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(t_k)} \right] - 1$$

Logo temos que  $\mathbb{E}[BG_{t_k+h} - BG_{t_k}] \neq \mathbb{E}[BG_{t_k} - BG_0]$  e calculando suas variâncias, temos que

$$V[BG_{t_k+h} - BG_{t_k}] = V[BG_{t_k+h}] - V[BG_{t_k}] = \left[ e^{2\mu(t_k+h)} e^{\sigma^2(t_k+h)} \right] \left( e^{\sigma^2(t_k+h)} - 1 \right).$$

$$\begin{aligned} V[BG_{t_k} - BG_0] &= V[BG_{t_k}] - V[BG_0] = V[BG_{t_k}] - 1 \\ &= \left[ e^{2\mu(t_k)} e^{\sigma^2(t_k)} \right] \left( e^{\sigma^2(t_k)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Logo temos que  $V[BG_{t_k+h} - BG_{t_k}] \neq V[BG_{t_k} - BG_0]$ . Portanto, as v.a.

$$BG_{t_k+h} - BG_{t_k} \quad e \quad BG_h - BG_0$$

não podem ter mesma distribuição.

Note que se chamamos

$$Z_t = \ln[BG_t] = \mu t + \sigma B_t$$

o processo  $Z_t$  é um movimento browniano com Drift, logo tem distribuição *normal* e incrementos independentes e estacionários.

Em resumo, o processo browniano geométrico,  $BG_t$  é um processo estocástico **não** gaussiano, é *lognormal*, com incrementos não independentes e não estacionários. Na figura (26) temos um movimento browniano geométrico para  $t \in [0, 1]$ ,  $\mu = 0.2$  e  $\sigma = 1$  com 1000 passos.

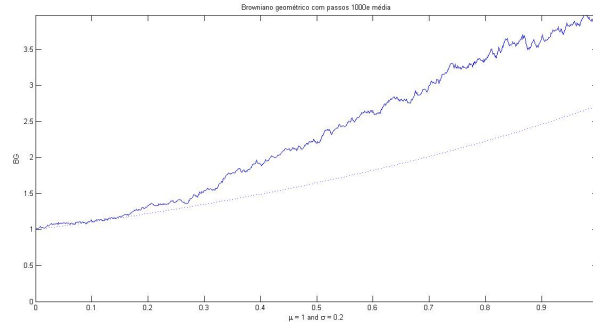


Figura 26 – Movimento browniano geométrico para  $t \in [0, 1]$ ,  $\mu = 0.2$  e  $\sigma = 1$  com 1000 passos

#### 4.4.4 Processo Ornstein-Uhlenbeck

Seja  $(B_t)_{t \geq 0}$  um MB. Considere o processo

$$BO_t = ve^{-\beta t} + \frac{\sigma e^{-\beta t}}{\sqrt{2\beta}} B_{e^{2\beta t}-1} \quad \text{para } t \geq 0, \beta > 0 \text{ com } \sigma \in \mathbb{R}$$

O  $\beta$  é chamado de coeficiente Drift e o  $\sigma^2$  é parâmetro de difusão, o processo  $BO_t$  é chamado de (**Processo Ornstein-Uhlenbeck**).

1. Se  $t = 0$ ,  $BO_0 = v + \frac{\sigma}{\sqrt{2\beta}} B_0 = v$
2. O processo  $BO_t$  é contínuo, pois  $B_t$  é contínuo e a função exponencial é contínua.
3. A esperança do processo  $BO_t$  é

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[BO_t] &= \mathbb{E}\left[ve^{-\beta t} + \frac{\sigma e^{-\beta t}}{\sqrt{2\beta}} B_{e^{2\beta t}-1}\right] = \mathbb{E}[ve^{-\beta t}] + \mathbb{E}\left[\frac{\sigma e^{-\beta t}}{\sqrt{2\beta}} B_{e^{2\beta t}-1}\right] \\ &= ve^{-\beta t} + \frac{\sigma e^{-\beta t}}{\sqrt{2\beta}} \mathbb{E}[B_{e^{2\beta t}-1}] = ve^{-\beta t} + \frac{\sigma e^{-\beta t}}{\sqrt{2\beta}} * 0 = ve^{-\beta t}. \end{aligned}$$

Calculemos sua variância,

$$\begin{aligned} V[BO_t] &= V\left[ve^{-\beta t} + \frac{\sigma e^{-\beta t}}{\sqrt{2\beta}} B_{e^{2\beta t}-1}\right] = V[ve^{-\beta t}] + V\left[\frac{\sigma e^{-\beta t}}{\sqrt{2\beta}} B_{e^{2\beta t}-1}\right] \\ &= 0 * \frac{\sigma^2 e^{-2\beta t}}{2\beta} V[B_{e^{2\beta t}-1}] = \frac{\sigma^2 e^{-2\beta t}}{2\beta} (e^{2\beta t} - 1) = \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t}). \end{aligned}$$

E calculamos sua covariância, com  $0 < s < t$

$$\begin{aligned}
Cov[BO_t, BO_s] &= \mathbb{E}[BO_t BO_s] - \mathbb{E}[BO_t] \mathbb{E}[BO_s] \\
&= \mathbb{E} \left[ \left( ve^{-\beta t} + \frac{\sigma e^{-\beta t}}{\sqrt{2\beta}} B_{e^{2\beta t}-1} \right) \left( ve^{-\beta s} + \frac{\sigma e^{-\beta s}}{\sqrt{2\beta}} B_{e^{2\beta s}-1} \right) \right] \\
&\quad - \left( \mathbb{E} \left[ \left( ve^{-\beta t} + \frac{\sigma e^{-\beta t}}{\sqrt{2\beta}} B_{e^{2\beta t}-1} \right) \right] \mathbb{E} \left[ \left( ve^{-\beta s} + \frac{\sigma e^{-\beta s}}{\sqrt{2\beta}} B_{e^{2\beta s}-1} \right) \right] \right) \\
&= \mathbb{E} \left[ ve^{-\beta t} ve^{-\beta s} + ve^{-\beta t} \frac{\sigma e^{-\beta s}}{\sqrt{2\beta}} B_{e^{2\beta s}-1} + ve^{-\beta s} \frac{\sigma e^{-\beta t}}{\sqrt{2\beta}} B_{e^{2\beta t}-1} \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[ \frac{\sigma e^{-\beta t}}{\sqrt{2\beta}} B_{e^{2\beta t}-1} \frac{\sigma e^{-\beta s}}{\sqrt{2\beta}} B_{e^{2\beta s}-1} \right] - ve^{-\beta t} ve^{-\beta s} \\
&= ve^{-\beta t} ve^{-\beta s} + \frac{\sigma e^{-\beta t}}{\sqrt{2\beta}} \frac{\sigma e^{-\beta s}}{\sqrt{2\beta}} \mathbb{E}[B_{e^{2\beta t}-1} B_{e^{2\beta s}-1}] - ve^{-\beta t} ve^{-\beta s} \\
&= \frac{\sigma e^{-\beta t}}{\sqrt{2\beta}} \frac{\sigma e^{-\beta s}}{\sqrt{2\beta}} \min(e^{2\beta t} - 1, e^{2\beta s} - 1) \\
&= \frac{\sigma e^{-\beta t}}{\sqrt{2\beta}} \frac{\sigma e^{-\beta s}}{\sqrt{2\beta}} (e^{2\beta s} - 1) \\
&= \frac{\sigma^2}{2\beta} (e^{-\beta(t-s)} - e^{-\beta(t+s)}).
\end{aligned}$$

4. O processo Ornstein-Uhlenbeck,  $BO_t$  é um processo gaussiano, de fato

$$\begin{aligned}
F_{BO}(x) &= \mathbb{P}[BO_t \leq x] = \mathbb{P} \left[ ve^{-\beta t} + \frac{\sigma e^{-\beta t}}{\sqrt{2\beta}} B_{e^{2\beta t}-1} \leq x \right] \\
&= \mathbb{P} \left[ \sigma e^{-\beta t} B_{e^{2\beta t}-1} \leq (x - ve^{-\beta t}) \sqrt{2\beta} \right] \\
&= \mathbb{P} \left[ B_{e^{2\beta t}-1} \leq \frac{(x - ve^{-\beta t}) \sqrt{2\beta}}{\sigma e^{-\beta t}} \right] \\
&= \mathbb{P} \left[ \sqrt{e^{2\beta t} - 1} B_1 \leq \frac{(x - ve^{-\beta t}) \sqrt{2\beta}}{\sigma e^{-\beta t}} \right] \\
&= \mathbb{P} \left[ B_1 \leq \frac{(x - ve^{-\beta t}) \sqrt{2\beta}}{\sigma e^{-\beta t} \sqrt{e^{2\beta t} - 1}} \right] = \mathbb{P} \left[ B_1 \leq \frac{(x - ve^{-\beta t}) \sqrt{2\beta}}{\sigma \sqrt{1 - e^{-2\beta t}}} \right] \\
&= \frac{(x - ve^{-\beta t}) \sqrt{2\beta}}{\sigma \sqrt{1 - e^{-2\beta t}}} \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{(x - ve^{-\beta t}) \sqrt{2\beta}}{\sigma \sqrt{1 - e^{-2\beta t}}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.
\end{aligned}$$

Onde na quarta igualdade usamos o fato que  $B_t$  é  $\frac{1}{2}$  auto similar e na quinta igualdade usamos o fato que  $B_1 \sim N(0, 1)$  Agora derivando  $F_{BO}(x)$  em  $x$  relação, obtemos a função da densidade  $f_{BO}$ , com média  $ve^{-\beta t}$  e variância  $\frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t})$ , ou seja,

$$f_{BO}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{\sigma \sqrt{1 - e^{-2\beta t}}}{\sqrt{2\beta}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - ve^{-\beta t})^2}{\frac{\sigma^2(1 - e^{-2\beta t})}{2\beta}}}$$

Logo  $BO_t$  é um processo gaussiano.

5. Para mostrar que  $BO_t$  não tem incrementos independentes, é suficiente se mostramos que as v.a.  $BO_{s+t} - BO_t$  e  $BO_s - BO_0$  tem covariância diferente de zero, pois ambas v.a. tem distribuição Gaussiana. Então, para uma partição arbitrária de tempos

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n \leq T$$

só temos que mostrar que as v.a.

$$BO_{t_k+h} - BO_{t_k} \quad e \quad BO_h - BO_0$$

tem covariância diferente de zero, ou seja,

$$Cov[(BO_{t_k+h} - BO_{t_k}), (BO_h - BO_0)] \neq 0$$

Então,

$$\begin{aligned} & Cov[(BO_{t_k+h} - BO_{t_k}), (BO_h - BO_0)] = \\ &= Cov[(BO_{t_k+h}), (BO_h)] - Cov[(BO_{t_k+h}), (BO_0)] \\ &- Cov[(BO_{t_k}), (BO_h)] + Cov[(BO_{t_k}), (BO_0)] \\ &= \left( \frac{\sigma^2}{2\beta} (e^{-\beta(t_k)} - e^{-\beta(t_k+2h)}) \right) - Cov[(BO_{t_k+h}), (v)] \\ &- \left( \frac{\sigma^2}{2\beta} (e^{-\beta(t_k-h)} - e^{-\beta(t_k+h)}) \right) + Cov[(BO_{t_k}), (v)] \\ &= \frac{\sigma^2}{2\beta} e^{-\beta(t_k)} (1 - e^{-2h\beta}) - 0 - \left( \frac{\sigma^2}{2\beta} e^{-\beta(t_k)} [e^{h\beta} - e^{-h\beta}] \right) + 0 \\ &= \frac{\sigma^2}{2\beta} e^{-\beta(t_k)} [1 - e^{-2h\beta} - e^{h\beta} + e^{-h\beta}] \\ &\neq 0 \quad \text{para } k \in \{0, 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

logo temos que

$$Cov[(BO_{t_k+h} - BO_{t_k}), (BO_h - BO_0)] \neq 0$$

Assim, temos que  $BO_t$  não tem incrementos independentes.

6. O processo  $BO_t$  não tem incrementos estacionários. Então, para uma partição arbitrária de tempos

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n \leq T$$

temos que mostrar que v.a.

$$BO_{t_k+h} - BO_{t_{k-1}+h} \quad e \quad BO_{t_k} - BO_{t_{k-1}}$$

tem distribuições diferentes, ou seja,

$$BO_{t_k+h} - BO_{t_{k-1}+h} \stackrel{d}{\neq} BO_{t_k} - BO_{t_{k-1}} \quad \text{ou} \quad BO_{t_k+h} - BO_{t_{k-1}+h} \approx BO_{t_k} - BO_{t_{k-1}}$$

sabemos que ambas v.a. tem distribuição *normal*, calculemos suas esperanças

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(BO_{t_k+h}) - (BO_{t_{k-1}+h})] &= \mathbb{E}[(BO_{t_k+h})] - \mathbb{E}[(BO_{t_{k-1}+h})] \\ &= ve^{-2\beta(t_k+h)} - ve^{-2\beta(t_{k-1}+h)} \\ &= ve^{-2\beta h} (e^{-2\beta(t_k)} - e^{-2\beta(t_{k-1})}).\end{aligned}$$

e para á outra v.a. temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(BO_{t_k}) - (BO_{t_{k-1}})] &= \mathbb{E}[(BO_{t_k})] - \mathbb{E}[(BO_{t_{k-1}})] \\ &= ve^{-2\beta(t_k)} - ve^{-2\beta(t_{k-1})} = v(e^{-2\beta(t_k)} - e^{-2\beta(t_{k-1})}).\end{aligned}$$

logo temos que as esperanças são diferentes, isto é,

$$\mathbb{E}[(BO_{t_k+h}) - (BO_{t_{k-1}+h})] \neq \mathbb{E}[(BO_{t_k}) - (BO_{t_{k-1}})]$$

Agora calculemos suas variâncias

$$\begin{aligned}V[(BO_{t_k+h}) - (BO_{t_{k-1}+h})] &= V[(BO_{t_k+h})] - V[(BO_{t_{k-1}+h})] \\ &= \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t_k+h)}) - \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t_{k-1}+h)}) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\beta} e^{-2\beta h} (e^{-2\beta t_{k-1}} - e^{-2\beta t_k}).\end{aligned}$$

e para á outra v.a. temos que

$$\begin{aligned}V[(BO_{t_k}) - (BO_{t_{k-1}})] &= V[(BO_{t_k})] - V[(BO_{t_{k-1}})] \\ &= \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t_k)}) - \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t_{k-1})}) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\beta} (e^{-2\beta t_{k-1}} - e^{-2\beta t_k}).\end{aligned}$$

logo temos que as variâncias são diferentes, isto é,

$$V[(BO_{t_k+h}) - (BO_{t_{k-1}+h})] \neq V[(BO_{t_k}) - (BO_{t_{k-1}})]$$

Portanto as v.a. tem distribuições diferentes, ou seja,

$$BO_{t_k+h} - BO_{t_{k-1}+h} \stackrel{d}{\neq} BO_{t_k} - BO_{t_{k-1}} \quad \text{ou} \quad BO_{t_k+h} - BO_{t_{k-1}+h} \approx BO_{t_k} - BO_{t_{k-1}}$$

Logo o processo  $BO_t$  não tem incrementos estacionários. Mas o processo  $BO_t$  tem incrementos estacionários no modo condicional (assintoticamente estacionário), ou seja, a ideia é condicionar o processo começar  $BO_0 = 0$  e não em  $BO_0 = v$ , e assim temos que as esperanças são as mesmas independentemente do tamanho de salto  $h > 0$  e logo, para o coeficiente Drift,  $\beta$ , damos uma condição assintótica, ou seja,  $\beta \rightarrow +\infty$  ou  $\beta \rightarrow +0$  e assim temos que as variâncias são "iguais" no infinito ou muito perto do zero, isto é, o processo  $BO_t$  é estacionário assintoticamente.

Na figura (27) temos um **Processo Ornstein-Uhlenbeck** para  $t \in [0, 1]$ ,  $\beta = 2$ ,  $\sigma = 0.01$  e  $v = 0.2$  com 300 passos.

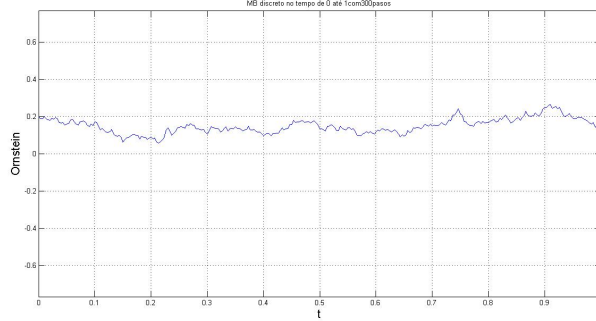


Figura 27 – **Processo Ornstein-Uhlenbeck** para  $t \in [0, 1]$ ,  $\beta = 2$ ,  $\sigma = 0.01$  e  $v = 0.2$  com 300 passos

#### 4.4.5 Movimento browniano fracionário

Agora vamos a falar do (**Processo fracionário do movimento browniano**), mas lembre-se definição de ser um processo auto-similar de ordem  $H$ , com  $H \in (0, 1)$ .

**Definição 4.4.1.** Um processo estocástico em  $\mathbb{R}$  é chamado de  $H$ -auto similar, ou  $H$ -as, com  $H \in (0, 1)$  se

$$\forall a > 0, \forall t \geq 0 \quad X_{at} \stackrel{d}{=} a^H X_t$$

Note que se o processo  $X_t$  é  $H$ -as temos as seguintes propriedades

1. Se o processo  $X_t$  começa  $t = 0$   $X_0 = 0$  implica que  $t^H X_1 = 0$
2. Se o processo  $X_t$  é contínuo para todo  $t$  implica que  $t^H X_1$  também é contínuo.
3. Se o processo  $X_t$  é gaussiano para todo  $t$  implica que  $t^H X_1$  também é gaussiano.
4. Se o processo  $X_t$  tem  $\mathbb{E}[X_t] = 0$  para todo  $t$ , implica que  $t^H X_1$  também tem valor esperado igual a zero, ou seja,

$$\mathbb{E}[X_t] = t^H \mathbb{E}[X_1] = 0$$

5. Se o processo tem  $\sigma^2 = \mathbb{E}[(X_1)^2] < \infty$  então

$$\begin{aligned} V[X_t] &= \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}[X_t])^2] = \mathbb{E}[(X_t)^2] = \mathbb{E}[(t^H X_1)^2] \\ &= t^{2H} \mathbb{E}[(X_1)^2] = t^{2H} \sigma^2. \end{aligned}$$



6. Se o processo  $X_t$  tem incrementos estacionários, então  $\forall s, t$  temos que

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_t, X_s] &= \mathbb{E}[X_t X_s] = \frac{1}{2} \left( \mathbb{E}[(X_t)^2] + \mathbb{E}[(X_s)^2] - \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}) \end{aligned}$$

assim podemos definir o processo **fracionário do MB**

**Definição 4.4.2.** O movimento browniano fracionário,  $(B_t^H)_{t \in [0, T]}$ , com índice  $H \in (0, 1)$  é um processo gaussiano centrado com  $B_0^H = 0$  e função de covariância

$$\text{Cov}[B_t^H, B_s^H] = \mathbb{E}[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}) \quad (s, t) \in [0, T]^2$$

O processo  $B_t^H$  é H-auto similar, H-as, de fato,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[B_{at}^H, B_{as}^H] &= \mathbb{E}[B_{at}^H B_{as}^H] = \frac{1}{2} [|at|^{2H} + |as|^{2H} + |a(t - s)|^{2H}] \\ &= a^{2H} \mathbb{E}[B_t^H B_s^H] = \mathbb{E}[a^H B_t^H a^H B_s^H]. \end{aligned}$$

Assim, todos são gaussianos com média zero e a mesma função de covariância, logo

$$B_{at}^H \stackrel{d}{=} a^H B_t^H$$

O movimento browniano *fracionário*  $B_t^H$  tem incrementos estacionários, é suficiente apenas considerar as covariâncias, para  $h > 0$  e  $s < t$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[(B_{t+h}^H - B_h^H)(B_{s+h}^H - B_h^H)] \\ &= \mathbb{E}[(B_{t+h}^H B_{s+h}^H)] - \mathbb{E}[(B_{t+h}^H - B_h^H)] - \mathbb{E}[(B_{s+h}^H - B_h^H)] + \mathbb{E}[(B_h^H)^2] \\ &= \frac{1}{2} [|t+h|^{2H} + |s+h|^{2H} + |(t-s)|^{2H} - |t+h|^{2H}] \\ &+ \frac{1}{2} [|h|^{2H} - |t|^{2H} - |s+h|^{2H} + |h|^{2H} - |s|^{2H} + 2|h|^{2H}] \\ &= \frac{1}{2} [|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}] \\ &= \mathbb{E}[(B_t^H B_s^H)]. \end{aligned}$$

Logo o processo  $B_t^H$  tem incrementos estacionários, isto é,

$$B_{t+h}^H - B_h^H \stackrel{d}{=} B_t^H$$

O movimento browniano *fracionário*  $B_t^H$  tem incrementos independentes se  $H = \frac{1}{2}$ . De fato, para  $0 < s < t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(B_s^H)(B_t^H - B_s^H)] &= \frac{1}{2} [t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H} - 2s^{2H}] \\ &= \frac{1}{2} [t^{2H} - s^{2H} - (t-s)^{2H}] \quad \text{com } H = \frac{1}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo o movimento browniano *fracionário*,  $B_t^H$ , tem incrementos independentes com  $H = \frac{1}{2}$ . Na figura (28) um típico movimento browniano fracionário para 1000 passos com  $H=0.1$  e  $H=0.4$

Na figura (29) um típico movimento browniano fracionário para 1000 passos com  $H=0.5$ ,

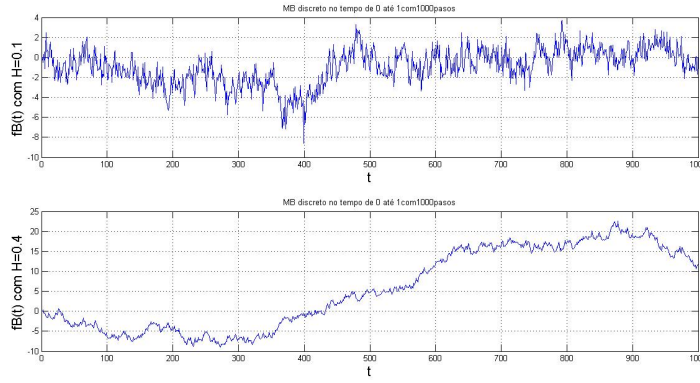


Figura 28 – Movimento browniano fracionário para 1000 passos com  $H=0.1$  e  $H=0.4$  e  $t \in [0, 1]$

$H=0.7$  e  $H=0.8$

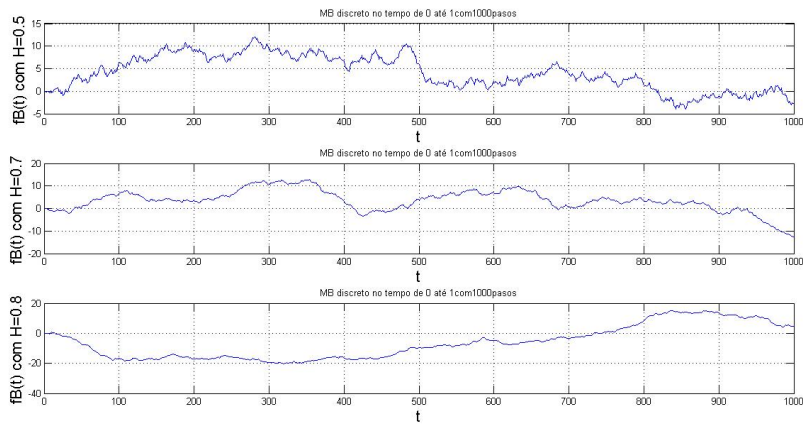


Figura 29 – Movimento browniano fracionário para 1000 passos com  $H=0.5$ ,  $H=0.7$  e  $H=0.8$  e  $t \in [0, 1]$

## 5 Conclusões

Este texto teve início como um estudo introdutório do movimento browniano, apresentando algumas propriedades de suas trajetórias e destacando a importância de sua natureza "universal" dentro dos processos estocásticos. Para nossa surpresa o movimento browniano tem aspectos que não são triviais e fora do senso comum, como por exemplo, falando das suas propriedades.

1. Sendo uma função contínua, não monótona e não diferenciável, para qualquer intervalo da reta,  $[a, b]$ , em particular, no intervalo  $(0, \epsilon)$ , com  $\epsilon > 0$  podemos ter uma quantidade não enumerável de zeros, do conjunto  $\mathcal{Z}$  e saber que este conjunto de zeros tem medida nula, isto, motiva um estudo mais aprofundado sobre este conjunto  $\mathcal{Z}$ .
2. Sendo um processo autosimilar, com  $H = \frac{1}{2}$ , Nós podemos pesquisar muito mais sobre estas propriedades e por exemplo, comparar suas diferentes dimensões fractais (se ele tem) com outras já conhecidas e assim poder estudar de forma profunda o movimento browniano como um objeto da geometria fractal.
3. Tendo (MB) uma relação próxima com o operador de calor, ideia de semigrupo e os processos de Markov, poderíamos explorar com mais profundidade as diferentes relações com a teoria de operadores, análise funcional e as EDP.
4. Sabendo sobre as propriedades sobre a não variação limitada e variação quadrática limitada poderíamos iniciar com certeza os estudos sobre equações diferenciais parciais estocásticas EDPS.
5. Aproveitando que movimento browniano pode ser implementado como um simples algoritmo podemos ter comparações computacionais e teóricas com os processos que são construídos a partir do MB.



## Referências

- ATHREYA, K.; LAHIRI, S. *Measure Theory and Probability Theory*. Springer, 2006. (Springer Texts in Statistics). ISBN 9780387329031. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=9tv0taI8l6YC>. Citado 5 vezes nas páginas 13, 27, 45, 78 e 79.
- BILLINGSLEY, P. *Probability and Measure*. Wiley, 2012. (Wiley Series in Probability and Statistics). ISBN 9781118341919. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=a3gavZbxyJcC>. Citado 3 vezes nas páginas 67, 113 e 140.
- CHUNG, K. *A Course in Probability Theory*. Academic Press, 2001. ISBN 9780121741518. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=zu80w7wd40UC>. Citado 4 vezes nas páginas 20, 22, 25 e 34.
- ETHIER, S.; KURTZ, T. *Markov processes: characterization and convergence*. Wiley, 1986. (Wiley series in probability and mathematical statistics. Probability and mathematical statistics). Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=BAWnAAAAIAAJ>. Citado 3 vezes nas páginas 14, 105 e 107.
- JAMES, B. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2004. (Projeto Euclides). ISBN 9788524401015. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=xT71HAAACAAJ>. Citado 10 vezes nas páginas 13, 15, 17, 25, 26, 29, 40, 46, 47 e 68.
- KARATZAS, I.; SHREVE, S. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer New York, 1991. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9780387976556. Disponível em: [http://books.google.com.br/books?id=ATNy\\\_Zg3PSsC](http://books.google.com.br/books?id=ATNy\_Zg3PSsC). Citado 19 vezes nas páginas 13, 14, 50, 66, 67, 70, 74, 75, 77, 80, 81, 83, 84, 87, 93, 94, 98, 99 e 113.
- KOLOKOL'COV, V. *Markov Processes, Semigroups, and Generators*. De Gruyter, 2011. (De Gruyter studies in mathematics). ISBN 9783110250107. Disponível em: <http://books.google.com.au/books?id=9Eii0wZFJDMC>. Citado na página 105.
- KORALOV, L.; SINAI, Y. *Theory of Probability and Random Processes*. Springer, 2007. (Universitext). ISBN 9783540688297. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=tlWOphOFRgwC>. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.
- LAWLER, G. *Introduction to Stochastic Processes, Second Edition*. Taylor & Francis, 2006. (Chapman & Hall/CRC Probability Series). ISBN 9781584886518. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=LATJdzBlajUC>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 113.
- MÖRTERS, P.; PERES, Y. *Brownian Motion*. Cambridge University Press, 2010. (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics). ISBN 9781139486576. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=e-TbA-dSrZYC>. Citado 6 vezes nas páginas 22, 83, 84, 86, 93 e 102.

- ROSENTHAL, J. *A First Look at Rigorous Probability Theory*. World Scientific, 2000. ISBN 9789810243036. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=DFvDQgAACAAJ>. Citado na página 65.
- SATO, K.-I. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). ISBN 9780521553025. Citado 2 vezes nas páginas 117 e 119.
- SPIEGEL, M. *Complex Variables: Conformal Mapping and Its Applications*. Schaum, 1964. (Schaum's outline series. Theory and Problems). Disponível em: [http://books.google.com.br/books?id=6WO\\_oAEACAAJ](http://books.google.com.br/books?id=6WO_oAEACAAJ). Citado na página 42.
- TANKOV, P. *Financial Modelling with Jump Processes*. Taylor & Francis, 2003. (Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series). ISBN 9781135437947. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=tDJ6AgAAQBAJ>. Citado 4 vezes nas páginas 14, 115, 118 e 119.